2019학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수답안

- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-1(a)

삼각형 ABC에서 선분 BC를 밑변으로 하였을 때, 높이는 점 A에서 직선 BC까지의 거리가 된다. 따라서 삼각형의 넓이가 최대가 되게 하는 타원 위의 점 A는 직선 BC와 평행한 직선이 타원과 접하는 점 중 직선 BC에서 멀리 떨어진 점이다. 직선 BC의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로, 타원 위의 점 중 접선의 기울기가 $\frac{2}{3}$인 점을 찾으면 된다. 타원 위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식은 $\frac{ax}{9}+\frac{by}{4}=1$이고 접선의 기울기는 $-\frac{4a}{9b}$이다. 따라서 방정식

$$-\frac{4a}{9b}=\frac{2}{3},\ \ \frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$$

을 풀면 두 점 $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$를 얻는다. 두 점 중 직선 BC에 더 멀리 떨어진 점은 $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$이다.

■ 1-1(b)

두 점 B, C가 직선 $y=-k$ (단, $0\le k<2$) 위에 놓여있다고 하면, 직선 BC에서 가장 멀리 떨어진 타원 위의 점은 점 $A(0,2)$이다. 두 점 B, C의 좌표는 각각 $\left(-3\sqrt{1-\frac{k^2}{4}},-k\right)$, $\left(3\sqrt{1-\frac{k^2}{4}},-k\right)$이므로 삼각형의 넓이 $S(k)$는

$$S(k)=3(2+k)\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}$$

이다. 이를 미분하면 $S'(k)=-\frac{3(k^2+k-2)}{2\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$이므로 $k=1$일 때, $S(k)$는 최댓값 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

2019학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수답안

- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-2(a)

수학적 귀납법을 이용하여 b_n이 3의 배수가 아님을 증명해 보자.

(i) $n=1$일 때, $b_1=2$이므로 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=k$일 때, b_k가 3의 배수가 아니라고 가정하면 b_k^2도 3의 배수가 아니다.

수열 $\{b_n\}$은 임의의 자연수 n에 대하여 $b_{n+1}=b_n^2-3b_n+3$을 만족시키는 수열이므로

$b_{k+1}=b_k^2-3b_k+3$이다. 이제 위 식을 변형하면

$$b_{k+1}+3b_k-3=b_k^2$$

이다. 여기서 $-3b_k+3$은 3의 배수이고 b_k^2은 3의 배수가 아니므로 b_{k+1}은 3의 배수가 아니다. 왜냐하면, 만일 b_{k+1}이 3의 배수이면 위 식의 좌변은 3의 배수이나 우변은 3의 배수가 아니기 때문이다. 그러므로 등식이 성립하지 않는다. 따라서 $n=k+1$일 때 b_{k+1}은 3의 배수가 아니다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 b_n은 모든 자연수 n에 대하여 3의 배수가 아님을 알 수 있다.

■ 1-2(b)

수열 $\{b_n\}$이 서로 소 수열임을 증명해 보자.

수열 $\{b_n\}$은 $b_1=2$이고 임의의 자연수 n에 대하여 $b_{n+1}=b_n^2-3b_n+3$을 만족한다. 이제 위 식을 변형하면

$$b_{n+1}-3=b_n^2-3b_n=b_n(b_n-3) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 따라서 임의의 두 자연수 n과 m $(n>m)$에 대하여 ①식을 반복하여 적용하면

$$b_n-3=b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_m(b_m-3)$$

이다. 이제 b_n과 b_m의 공약수를 k라 하면, $b_n-b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_m(b_m-3)=3$에서 k가 좌변의 약수이므로 k는 3의 약수이어야 한다. 그러나 b_n은 3의 배수가 아니므로 $k\neq 3$이고 따라서 $k=1$이다. 즉, b_n과 b_m은 서로 소이다. 그러므로 위와 같이 정의된 수열 $\{b_n\}$은 서로 소 수열이다.

2019학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수답안

- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-3(a)

$f(x) = x^3 + 3x^2\cos\theta - 4\sin 2\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x\cos\theta = 3x(x + 2\cos\theta) = 0$이다. 따라서 제시문 〈다〉의 (I)을 이용하면

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -2\cos\theta$$

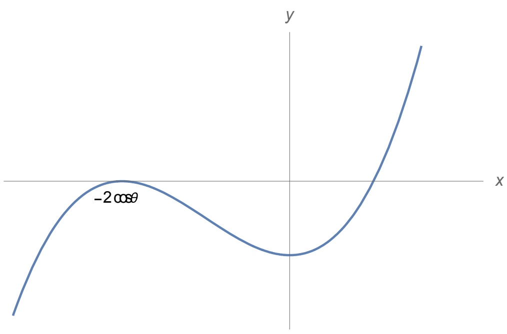
에서 x축과 접할 수 있다. 여기서 $f(0) = -4\sin 2\theta < 0$이므로 $x = 0$에서 x축과 접할 수 없다. 따라서 $x = -2\cos\theta$에서 x축과 접하기 때문에 제시문 〈다〉의 (I)을 이용하면 $f(-2\cos\theta) = 0$임을 알 수 있다. 그러므로

$$\begin{aligned} 0 &= f(-2\cos\theta) \\ &= (-2\cos\theta)^3 + 3(-2\cos\theta)^2\cos\theta - 4\sin 2\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 4\sin 2\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 8\sin\theta\cos\theta \\ &= 4\cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin\theta) \\ &= 4\cos\theta(1 - \sin^2\theta - 2\sin\theta) \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos\theta > 0$이므로 $1 - \sin^2\theta - 2\sin\theta = 0$이다. 주어진 θ의 범위에서 $\sin\theta$의 값은 0과 1 사이에 놓여 있으므로

$$\sin\theta = \sqrt{2} - 1$$

을 얻는다. 그래프의 개형은 다음과 같다.



2019학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수답안

- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-3(b)

제시문 〈다〉의 (II)에 의해서 $\alpha = -2\cos\theta$에서 x축에 접하기 때문에 또 다른 한 근을 β라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2\cos\theta)^2(x-\beta) \\ &= (x^2+4x\cos\theta+4\cos^2\theta)(x-\beta) \\ &= x^3+(4\cos\theta-\beta)x^2+(4\cos^2\theta-4\beta\cos\theta)x-4\beta\cos^2\theta \end{aligned}$$

이다. 또한

$$f(x) = x^3+3x^2\cos\theta-4\sin 2\theta$$

이므로 x^2의 계수를 비교하면 $\beta = \cos\theta$이다.

(x의 계수 또는 상수항을 비교하여도 같은 결론을 얻는다. 다만 상수항끼리 비교하면 $\beta = 2\tan\theta$를 얻고 1-3(a)에서 얻은 $\sin\theta$의 값을 이용하면 $\beta = \cos\theta$임을 알 수 있다.)

따라서 구하는 부분의 넓이는 제시문 〈다〉의 (III)에서 주어진 정적분을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| &= \left|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{-2\cos\theta}^{\cos\theta}(x+2\cos\theta)^2(x-\cos\theta)\,dx\right| \\ &= \frac{1}{12}(3\cos\theta)^4 \\ &= \frac{27}{4}\cos^4\theta \\ &= \frac{27}{4}(1-\sin^2\theta)^2 \\ &= \frac{27}{4}\{1-(\sqrt{2}-1)^2\}^2 \\ &= 27(3-2\sqrt{2}) \end{aligned}$$