

4.

2019학년도

자연계열 해설

[자연계열문항] 제시문

<가>

계수 a, b, c 가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 근과 계수와의 관계는 다음과 같다.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

이제 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2rx + r^2 + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$ 가 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구해보자. 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = 2r$ 이고 $\alpha\beta = r^2 + 1$ 임을 알 수 있다. 그러므로 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2r}{r^2 + 1}$ 이다. $\frac{2r}{r^2 + 1}$ 이 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구하기 위해

$\frac{2r}{r^2 + 1} = n$ (단, n 은 정수)이라고 하자. 먼저 $n = 0$ 인 경우, $r = 0$ 이다. $n \neq 0$ 인 경우, r 에 대한 이차

방정식 $nr^2 - 2r + n = 0$ 을 얻고 이 방정식을 풀면 $r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4n^2}}{2n}$ 이다. r 이 실수이므로 판별식

$D = 4 - 4n^2 \geq 0$ 이다. 따라서 $-1 \leq n \leq 1$ 이고 $n \neq 0$ 이므로 $n = -1$ 또는 $n = 1$ 이다. $n = -1$ 이면

$r = -1$ 이고, $n = 1$ 이면 $r = 1$ 이다. 그러므로 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$ 가 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구하면

$r = -1, 0, 1$ 이다.

<나>

주어진 자연수 m 에 대하여 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$1) a_1 = m$$

$$2) a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n \text{이 홀수}) \\ \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

예를 들어 $m = 19$ 인 경우, 수열 $\{a_n\}$ 은 19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 정의로부터 각 항은 자연수이다. 또한 제 k 항이 1인 경우, 그 다음 항들은

$$2, 1, 2, 1, \dots$$

으로 2와 1이 교대로 반복되어 나타남을 알 수 있다.

위와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = 1$ 인 자연수 k 가 항상 존재한다는 것을 보이자.

$a_n > 2$ 인 n 에 대하여 $a_n > a_{n+2}$ 이 성립함을 다음과 같이 확인할 수 있다.

a_n 이 짝수이면 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ 이고, $a_{n+2} \leq a_{n+1} + 1$ 이 성립한다. $a_n > 2$ 이므로

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} + 1 = \frac{a_n}{2} + 1 < a_n$$

이다. a_n 이 홀수이면 $a_n = 2l + 1$ (l 은 자연수)로 쓸 수 있고, $a_{n+1} = 2l + 2$ 가 짝수이므로

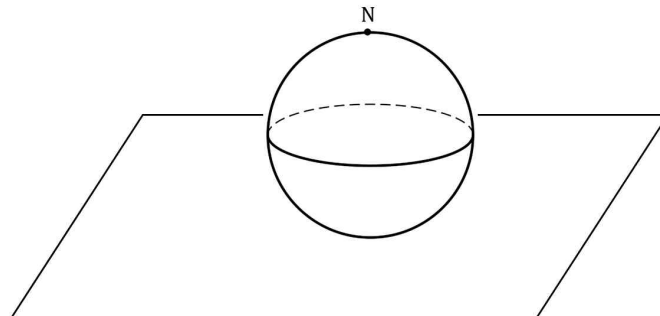
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} = l + 1$$

이 되어 $a_n > a_{n+2}$ 이다. 그러므로 $a_n > 2$ 인 n 에 대하여 $a_n > a_{n+2}$ 이다.

지금까지의 논의를 이용하면 $a_k = 1$ 인 자연수 k 가 존재함을 다음과 같이 보일 수 있다. $a_n > 2$ 인 n 에 대하여 $a_n > a_{n+2}$ 이므로, $a_h \leq 2$ 를 만족시키는 자연수 h 가 존재한다. $a_h = 1$ 인 경우 $k = h$ 로 하고, $a_h = 2$ 인 경우 $k = h + 1$ 로 하면 $a_k = 1$ 이다.

<다>

투명한 둥근 공이 평평한 바닥에 놓여있다. <그림 1>과 같이 공 위의 점 N 에 광원이 있고, 개미 한 마리가 공 위를 기어 다니고 있다. 개미의 움직임과 바닥에 생기는 그림자의 움직임을 수학적으로 살펴보자.



<그림 1>

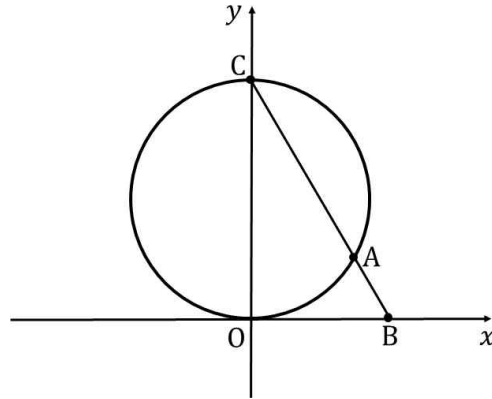
이 문제를 <그림 2>와 같이 좌표평면 위에서 단순화할 수 있다. 먼저 반지름의 길이가 1이고 중심이 $(0, 1)$ 인 원

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

을 생각하자. 원 위의 점 $C(0, 2)$ 에 광원이 있다. 만약 원 위의 점 A 가 점 C 에서 출발하여 일정한 속도 v 로 시계방향으로 원 위를 움직이면 시각 $t(0 < t < \frac{\pi}{v})$ 에서의 점 $A(x, y)$ 의 위치는

$$x = \sin(vt), \quad y = 1 + \cos(vt)$$

이다. 점 A 의 그림자는 두 점 C 와 A 를 잇는 직선과 x 축의 교점 B 로 주어진다.



<그림 2>

이제 원래의 문제로 돌아가서 <그림 1>을 좌표공간에 수학적으로 나타내어 보자. 반지름의 길이가 1이고 중심이 $(0, 0, 1)$ 인 구

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

을 생각하자. 점 P 는 구와 평면 $z = \frac{1}{2}$ 이 만날 때 생기는 원 위를 움직인다고 가정하자. 점 P 의 그림자는 점 $N(0, 0, 2)$ 와 점 P 를 잇는 직선과 xy 평면의 교점 Q 로 주어진다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 이차방정식 $2x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라고 할 때, 점 (α, β) 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위에 있음을 보이시오.

1-1(b). x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2rx + r^2 - r - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{(\alpha - \beta)^2 - 6}{(\alpha + \beta)^2 + 3}$ 이 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구하시오.

1-2. 제시문 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). $m = 2^{2019} - 3$ 일 때, $a_k = 1$ 이 되는 k 의 최솟값을 구하시오.

1-2(b). 주어진 자연수 m 에 대하여 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$ 이 있다.

1) $b_1 = m$

$$2) b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n - 2 & (b_n \text{이 홀수}) \\ \frac{b_n}{2} & (b_n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

위와 같이 수열 $\{b_n\}$ 을 정의하면 $b_k = 0$ 인 자연수 k 가 존재함을 보이시오. (단, 0은 짝수이다.)

1-3. 제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). <그림 2>에서 시각 $t = \frac{2\pi}{3v}$ 에서 선분 OB의 길이의 변화율을 구하시오.

1-3(b). 밑줄 친 점 Q가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

[자연계열문항] 출제의도와 논제의 구성

제시문 <가>에서는 근과 계수와의 관계 및 이차방정식의 판별식을 활용하여 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2rx + r^2 + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$ 가 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구하는 방법을 설명한다. 문항 <1-1(a)>에서는 근과 계수와의 관계를 이용할 수 있는지를 평가한다. 문항 <1-1(b)>에서는 제시문 <가>의 논리 전개를 이해하여 같은 방법을 문제에 적용할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>는 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하고 $a_k = 1$ 인 자연수 k 가 존재함을 보인다. 문항 <1-2(a)>에서는 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 $a_k = 1$ 인 자연수 k 의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다. 문항 <1-2(b)>에서는 제시문 <나>의 논리 전개를 이해하여 같은 방법으로 주어진 명제를 증명할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>는 직선과 구의 방정식을 이용하여 구의 한 점에 광원이 있을 때 그림자의 위치를 설명한다. 문항 <1-3(a)>에서는 그림자의 좌표를 구하고 미분법을 사용하여 길이의 변화율을 구할 수 있는지를 평가한다. 문항 <1-3(b)>에서는 구와 평면이 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이를 구하고 닮음비를 이용하여 원의 그림자의 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.

이차방정식, 수열, 미분, 직선, 평면, 원, 구 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학 I, 수학 II, 미적분 I, 미적분 II, 기하와 벡터 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 이차방정식, 수열, 미분, 직선, 평면, 원, 구에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[자연계열문항] 답안 구성요소

■ 각 세부 문항별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문항 <1-1(a)>, <1-1(b)>

1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 근과 계수와의 관계를 올바르게 적용한다.
4. <1-1(b)>에서 r 에 대한 이차방정식을 구한다.
5. 판별식을 이용하여 실근을 가질 조건을 얻는다.
6. 이차부등식의 해를 구한다.

▶ 문항 <1-2(a)>, <1-2(b)>

1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 귀납적으로 정의된 수열을 이해한다.
4. <1-2(a)>에서 수열의 정의를 이용하여 $a_k = 1$ 이 되는 자연수 k 의 최솟값을 구한다.
5. <1-2(b)>에서 $b_n \geq 0$ 임을 안다.

6. <1-2(b)>에서 제시문의 방법을 적용하여 $b_n > 0$ 인 n 에 대하여 $b_n > b_{n+2}$ 임을 보이고 $b_k = 0$ 인 자연수 k 가 존재함을 증명한다.

▶ 문항 <1-3(a)>, <1-3(b)>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 점 B의 좌표를 구한다.
4. 삼각함수의 미분을 사용하여 선분 OB의 변화율을 계산한다.
5. 점 Q가 그리는 도형이 원임을 파악한다.
6. 닮음비를 이용하여 원의 둘레를 구한다.

[자연계열문항] 모범답안 예시

■ 1-1(a)

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4$$

이다. 그러므로 점 (α, β) 는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위에 있다.

<다른 풀이>

이차방정식 $x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ 의 두 근 α, β ($\alpha < \beta$)는

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

이다. 점 (α, β) 는 다음과 같이 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 4$ 를 만족시킨다.

$$\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\frac{8 - 2\sqrt{7}}{4}\right) + \left(\frac{8 + 2\sqrt{7}}{4}\right) = 4$$

■ 1-1(b)

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = 2r$ 이고 $\alpha\beta = r^2 - r - 2$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$(\alpha - \beta)^2 - 6 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta - 6 = (2r)^2 - 4(r^2 - r - 2) - 6 = 4r + 2$$

이고 $(\alpha + \beta)^2 + 3 = 4r^2 + 3$ 이다. 그러므로

$$\frac{(\alpha - \beta)^2 - 6}{(\alpha + \beta)^2 + 3} = \frac{4r + 2}{4r^2 + 3}$$

이다. $\frac{4r + 2}{4r^2 + 3}$ 가 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구하기 위해 $\frac{4r + 2}{4r^2 + 3} = n$ (n 은 정수)이라고 하자.

먼저 $n = 0$ 인 경우, $r = -\frac{1}{2}$ 이다. $n \neq 0$ 인 경우, r 에 관한 이차방정식 $4nr^2 - 4r + 3n - 2 = 0$ 을 얻고 이 방정식을 풀면

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16n(3n - 2)}}{8n}$$

이다. r 이 실수이므로 판별식 $D = 16 - 16n(3n - 2) \geq 0$ 이다. 이로부터 $3n^2 - 2n - 1 \leq 0$ 을 구할 수 있고 이를 인수분해하면 $(3n + 1)(n - 1) \leq 0$ 이므로 $-\frac{1}{3} \leq n \leq 1$ 이다. $n \neq 0$ 이므로 $n = 1$ 이다.

$n = 1$ 이면 $r = \frac{1}{2}$ 이다. 그러므로 $\frac{(\alpha - \beta)^2 - 6}{(\alpha + \beta)^2 + 3}$ 가 정수가 되게 하는 모든 실수 r 을 구하면

$r = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 이다.

■ 1-2(a)

수열 $\{a_n\}$ 의 정의에 의하여 $a_1 = 2^{2019} - 3$, $a_2 = a_1 + 1 = 2^{2019} - 2$, $a_3 = \frac{a_2}{2} = 2^{2018} - 1$,
 $a_4 = 2^{2018}$, $a_5 = 2^{2017}$, $a_6 = 2^{2016}$, $a_7 = 2^{2015}$, $\dots$, $a_{2021} = 2^1$ 이며 $a_{2022} = 1$ 이다. 따라서 $a_k = 1$ 이
 되는 자연수 k 의 최솟값은 $k = 2022$ 이다.

■ 1-2(b)

수열 $\{b_n\}$ 의 정의로부터 각 항은 0 이상의 정수이다. b_n 이 홀수인 경우, $b_{n+1} = 2b_n - 2$ 이고 이는
 짝수이므로 $b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{2} = b_n - 1$ 이다. 따라서 $b_n > b_{n+2}$ 이다. 또한 b_n 이 짝수인 경우, $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$
 이고 이 때 b_{n+1} 이 짝수이면 (즉, b_n 이 4의 배수이면) $b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{2} = \frac{b_n}{4}$ 이고, b_{n+1} 이 홀수이면
 (즉, b_n 이 4의 배수가 아닌 짝수이면) $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 2 = b_n - 2$ 이다. 그러므로 $b_n > 0$ 인 n 에 대하
 여 $b_n > b_{n+2}$ 이다. 따라서 $b_k = 0$ 인 자연수 k 가 존재한다.

■ 1-3(a)

두 점 $C(0, 2)$ 와 $A(\sin(vt), 1 + \cos(vt))$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\cos(vt) - 1}{\sin(vt)}x + 2$$

이다. 그러므로 이 직선과 x 축의 교점 B 의 좌표는 $\left(\frac{2\sin(vt)}{1 - \cos(vt)}, 0\right)$ 이고, 시각 t 에서 선분 OB 의
 길이의 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\sin(vt)}{1 - \cos(vt)}\right) = -\frac{2v}{1 - \cos(vt)}$$

따라서 시각 $t = \frac{2\pi}{3v}$ 에서 선분 OB 의 길이의 변화율은 $-\frac{4v}{3}$ 이다.

■ 1-3(b)

평면 $z = \frac{1}{2}$ 과 구 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ 이 만날 때 생기는 원의 중심은 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ 이다. 이 원의 반

지름을 구하기 위해 평면의 방정식 $z = \frac{1}{2}$ 을 구의 방정식에 대입하면

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

이다. 따라서 점 P 는 평면 $z = \frac{1}{2}$ 위의 중심이 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ 이고 반지름이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

점 Q 는 점 P 와 점 $N(0, 0, 2)$ 를 잇는 직선과 xy 평면의 교점이므로 점 Q 는 중심이 원점인 원을 따
 라 움직임을 알 수 있다. 그림자의 길이를 구하기 위해 이 원의 반지름 r 을 구해보자.

아래의 그림과 같이 닮음비를 이용하면

$$\frac{3}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : r$$

이고 이로부터 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 그림자의 길이는 $2\pi r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ 이다.

