예시 답안

<가>와 <나>는 모두 대상을 잘 양육하기 위한 실천 혹은 방법론을 보여주고 있다. 그러나 양육관은 대비적으로 나타난다.

<가>의 서술자는 자연 상태로 방치되어 있던 대나무들을 살려낸 경험을 이야기하고 있다. 그는 대나무가 잘 자랄 수 있었던 이유를 '훌륭한 분의 손을 거쳤기 때문'이라고 보고 있고, 잘 자라지 못했던 이유를 '천하고 속된 사람에 의해 버려지게 되었기 때문'으로 보고 있다. 그리고 버려졌던 대나무들을 다시 살려 내기 위해, 이전의 훌륭한 주인이 했듯이 잡목을 잘라 내는 등의 인위적 손길을 가하고 있다. 이 점으로 볼 때 <가>의 서술자는 '양육에는 인위적 개입이 필요하다'는 믿음과 입장을 지닌 이라 볼 수 있다.

<나>의 서술자는 아이의 양육에 대한 입장을 보이고 있다. 그는 사람들이 아이를 키울 때 그들이 기형적으로 자랄까봐 염려하여 배내옷 등의 인위적 틀로 아이의 자유로운 성장을 제한하는 관습에 주목하고 있다. 이후 그는 다른 지역의 사례를 통해 이러한 관습에 대해 비판적인 입장을 드러내고 있다. 즉, 인위적 조처 없이 아이를 자유롭게 자라게 놓아 둔 지역의 사람들이 오히려 기형 없이 건강히 잘 자란 예를 보임으로써 자유로운 방식의 양육을 선호하고 있음을 보인다. 이로 볼 때 <나>의 서술자는 '대상을 건강하게 양육하기 위해서는 인위적 개입을 하지 말아야 한다'는 입장을 지닌 이라 볼 수 있다.

한편 <다>의 문제상황은 '현대 경제가 독점이라는 기형적 상황으로 내몰리고 있는 상황'이라고 할 수 있다. <다>의 서술자는 이렇게 된 원인은 시장의 자율적 경쟁이 아닌 정부의 인위적 공공 정책들에 있다고 보고 있다. 현대 경제를 유기체로 가정할 때, 이 문제 상황에 대한 <나>의 해결 방식을 유추적용하면 '공공정책과 같은 정부의 인위적 개입 없이 시장의 자율에 맡겨야 한다'일 것이다. 왜냐하면 <나>의 서술자가 지닌 양육관은 외부의 인위적인 제약이 개입되면 필연적으로 기형적인 형태로 나아가고, 유기체 자신의 자연적 힘에 맡겨둘 때 오히려 건강과 균형을 회복한다고 보고 있기 때문이다.

2. 자연계열 문항해설

[문항정보]

일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 / 2-1(a), 2-1(b), 2-2(a), 2-2(b), 2-2(c)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분I, 미적분II, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 확률, 미분, 최대와 최소
예상 소요 시간	50분/전체 60분	

문항 및 제시문

<가> 0이상의 정수 c에 대하여 다음과 같은 <게임1>을 생각해보자. 공이 1개 이상씩 들어있는 두 바구니 X, Y에서 두 플레이어 A와 B가 번갈아 공을 꺼낸다. 이때, 각 플레이어는 두 바구니 중 한쪽을 선택하여 공을 꺼내거나, 양쪽 바구니 모두에서 공을 꺼낼 수 있는데, 두 바구니 중 한쪽을 선택하여 공을 꺼낼 경우에는 개수에 제한 없이 한 개 이상의 공을 꺼낼 수 있고, 양쪽 바구니 모두에서 공을 꺼낼 경우에는 두 바구니에서 꺼내는 공의 개수의 차이가 c이하이어야 한다. 예를 들어, $c=0$이면 두 바구니에서 꺼내는 공의 개수는 같다. 이러한 규칙으로 게임을 하여 두 바구니를 동시에 비우는 플레이어가 승자가 된다. 즉, 자기 차례가 왔을 때 두 바구니에서 더 이상 꺼낼 공이 없으면 패자가 된다.

$c=0$인 경우의 예를 들어보자. 두 바구니 X와 Y에 공이 각각 10개와 20개가 들어있고 플레이어 A부터 시작한다고 하면 다음과 같은 가상의 게임 결과를 생각할 수 있다. 여기서 바구니 X, Y에 남아있는 공의 개수를 순서쌍으로 나타내어 표기하기로 하자. 즉, (x,y)는 X에는 x개의 공, Y에는 y개의 공이 남아 있는 상태를 표시한다.

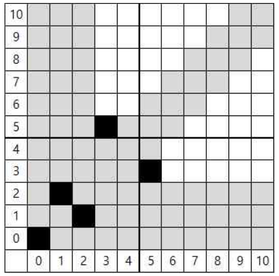
플레이어	=	A		B		A		B		A		B		A
(x,y)	=	$(10,20)$	$\rightarrow$	$(10,14)$	$\rightarrow$	$(2,6)$	$\rightarrow$	$(2,5)$	$\rightarrow$	$(2,1)$	$\rightarrow$	$(1,1)$	$\rightarrow$	$(0,0)$

위 도표에서 A가 먼저 Y에서 6개, B가 X, Y 양쪽에서 8개를 꺼내고, 다시 A가 Y에서 1개, B가 Y에서 4개를 꺼내고, 마지막으로 A가 X에서 1개, B가 양쪽에서 1개씩을 꺼내면 두 바구니 모두에 남은 공이 없어 B가 승자가 된다.

이제 <게임1>의 필승전략을 구해 보자. 만일 플레이어 A가 적절한 순서쌍을 만들어서 플레이어 B의 플레이에 관계없이 다음 차례에 $(0,0)$을 만들 수 있다면 A가 승자가 될 것이다. A가 만든 이러한 순서쌍을 '필승전략'이라고 하자. $c=0$인 경우에 $(1,2)$는 필승전략이다. 왜냐하면 상대가 바구니 X에서 공을 꺼내어 X가 0이 되는 경우에는 다음 플레이어는 바구니 Y의 공을 모두 꺼낼 수 있으므로 $(0,0)$을 만들 수 있다. 또 상대가 X에서 공을 꺼내지 않는 경우에는 Y에서 한 개 이상의 공을 꺼내야 하므로 남는 공에 대한 순서쌍은 $(1,y)$ (단, y는 0 또는 1)이다. 다음 플레이어는 X와 Y에 남은 공을 모두 꺼낼 수 있으므로 $(0,0)$을 만들 수 있다. 따라서 순서쌍 $(1,2)$를 만든 플레이어는 승자가 된다. 같은 방법으로 생각하면 순서쌍 $(2,1)$도 필승전략이다.

다음은 <게임2>에 대한 설명이다. <게임2>는 아래 그림과 같은 체스판에서 두 사람이 번

갈아서 퀸(Queen)을 움직여 최종적으로 $(0,0)$의 위치에 퀸을 놓는 플레이어가 이기는 게임이다. 이 게임에서는 퀸을 왼쪽(←), 아래(↓), 또는 대각선으로 왼쪽 아래(↙)로만 움직일 수 있다. 이 게임이 $c=0$인 경우의 <게임1>과 본질적으로 같음을 다음과 같이 설명할 수 있다. 체스판 위의 위치 (x,y)를 바구니 X에 공이 x개, 바구니 Y에 공이 y개 들어있는 상황으로 대응시킨다. 그리고 퀸을 왼쪽으로 a칸 움직이는 것($(x,y)\rightarrow(x-a,y)$)은 바구니 X에서 a개의 공을 꺼내는 것으로, 퀸을 아래로 b칸 움직이는 것($(x,y)\rightarrow(x,y-b)$)은 바구니 Y에서 b개의 공을 꺼내는 것으로, 그리고 퀸을 대각선으로 왼쪽 아래로 k칸 움직이는 것($(x,y)\rightarrow(x-k,y-k)$)은 두 바구니 모두에서 k개의 공을 꺼내는 것으로 대응시킨다. 그러면 결국 <게임2>는 $c=0$인 경우의 <게임1>과 같아진다. 따라서 <게임2>에서는 $c=0$인 경우의 <게임1>에서처럼, 위치 $(1,2)$ 혹은 $(2,1)$에 먼저 퀸을 놓는 플레이어가 승자가 된다. 다음의 필승전략이 되는 위치를 구하기 위해서는 위치 $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$에서 오른 쪽(→), 위(↑), 대각선으로 오른쪽 위(↗)에 있는 모든 위치들을 제외하고 위치 $(0,0)$에서 가장 가까운 곳을 찾으면 된다. 이는 $(3,5)$와 $(5,3)$임을 알 수 있다.



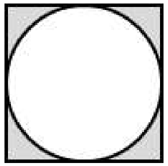
< 그림 1 >

<나> 생산자는 어떤 제품을 만들 때, 생산원가를 가능하면 낮추기를 원한다. 탄산음료를 담는 원기둥 모양의 알루미늄 깡통을 제작한다고 가정하자. 깡통을 만드는 데 사용되는 알루미늄의 비용은 그 깡통의 겉넓이에 비례한다. 여기서, 사용되는 알루미늄의 두께는 모두 일정하다고 가정하여 무시하기로 한다. 즉, 일정한 부피 V를 갖는 원기둥 모양의 깡통을 만드는 데 들어가는 비용을 최소화하기 위해서는 원기둥의 겉넓이 A(두 밑면과 옆면의 넓이의 합)를 최소화해야 한다. 원기둥의 높이를 h, 밑면인 원의 반지름을 r이라 하면

$$V=\pi r^2 h,\ A=2\pi r^2+2\pi rh$$

이다. $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$이므로 겉넓이 A는 변수 r의 함수가 되고, 미분을 이용하면 겉넓이 A를 최소화하기 위한 조건이 $h=2r$임을 보일 수 있다. 즉, 원기둥의 높이가 밑면의 지름과 같을 때 비용이 최소로 든다.

그런데 실제로 원기둥 모양의 탄산음료수 깡통을 보면 일반적으로 깡통의 높이가 뚜껑의 지름보다 크다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 차이가 생기는 이유는 위의 계산과정에서는 깡통의 제작공정에서 버려지는 재료를 무시하고 깡통에 사용되는 재료만을 고려하여 식을 세웠기 때문이다. 예를 들어, 원기둥 모양의 깡통의 밑면을 정사각형 모양의 알루미늄 판으로부터 만든다고 하면 <그림 2>에서의 어두운 부분은 원판을 만들고 버려지므로 최소화해야 할 재료의 넓이 B는 원의 넓이가 아니라 정사각형의 넓이를 이용하여


<그림 2>

$$B=2(2r)^2+2\pi rh$$

가 된다. 이때 B가 최소화되는 반지름 r과 높이 h의 관계식은 $h=\dfrac{8}{\pi}r$이다.

2018학년도 모의논술 문항해설

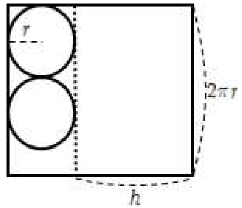
2-1. <가>를 읽고 다음의 질문에 답하시오.

2-1(a). 0이상의 정수 c에 대한 <게임1>에서 순서쌍 $(1,c+2)$가 필승전략임을 보이시오.

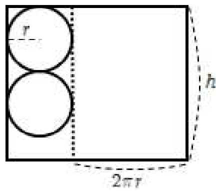
2-1(b). <게임2>에서 <그림 1>처럼 가로와 세로가 모두 0부터 10까지 있는 체스판 위에서 $(0,0)$을 제외하고 무작위로 선택한 위치가 필승전략이 될 확률을 구하시오.

2-2. 직사각형 모양의 알루미늄 판을 세로로 잘라 한 조각은 깡통의 옆면으로 사용하고, 다른 한 조각은 다시 두 원 모양으로 잘라 깡통의 두 밑면으로 사용하여 부피가 1인 깡통을 만들려고 한다. 다음의 질문에 답하시오.

2-2(a). 다음 그림과 같이 알루미늄 판의 가로부분을 깡통의 높이로 사용하는 경우 판의 넓이가 최소가 되는 밑면의 반지름 r을 구하시오.



2-2(b). 다음 그림과 같이 알루미늄판의 세로부분을 깡통의 높이로 사용하는 경우 판의 넓이가 최소가 되는 밑면의 반지름 r을 구하시오.



2-2(c). 2-2(a)와 2-2(b)에서 밑면의 반지름을 구한 두 방법을 비교할 때, 어떤 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있는지를 설명하시오.

출제 의도

학생들의 수학적 사고력, 수학적 지문을 읽고 이해하는 능력, 이해한 지문을 문제에 적용하는 능력을 평가하기 위하여, 게임의 필승전략을 수학적으로 이해하는 지문과 제품 생산의 원가를 낮추는데 이용할 수 있는 수학적 방법에 대한 지문을 제시하였다. 문항들은 수리논술의 기본정신과 방향을 따라 교과지식의 단독 반복학습과 암기를 통해 습득된 지식을 통해 문제를 풀기 보다는 수학적 원리와 기본 지식을 기초로 수리적 현상을 논리적으로 기술할 수 있는지를 평가하고자 구성되었다.

제시문 <가>는 서로 관련이 있는 두 가지 게임을 언급한다. <게임1>은 공이 1개 이상씩 들어있는 두 바구니에서 두 플레이어가 번갈아 공을 꺼낼 때, 각 플레이어는 두 바구니 중 한쪽을 선택하여 공을 꺼내거나, 양쪽 바구니 모두에서 공을 꺼낼 수 있는데, 두 바구니 중 한쪽을 선택하여 공을 꺼낼 경우에는 개수에 제한 없이 한 개 이상의 공을 꺼낼 수 있고, 양쪽 바구니 모두에서 공을 꺼낼 경우에는 두 바구니에서 꺼내는 공의 개수의 차이가 c (c는 0이상인 정수)이하이어야 한다. 이러한 규칙으로 게임을 하여 두 바구니를 동시에 비우는 플레이어가 승자가 되는 게임이다. <게임 2>는 체스판에서 두 플레이어가 번갈아서 퀸(Queen)을 움직여 최종적으로 $(0,0)$의 위치에 퀸을 놓는 플레이어가 이기는 게임인데, 이는 $c=0$인 경우의 <게임 1>과 본질적으로 같다.

제시문 <나>는 원기둥 모양의 탄산음료수 깡통의 제작공정에서 버려지는 재료를 고려하여 제작비용을 최소화하는 데 필요한, 그 원기둥의 높이와 밑면인 원의 반지름의 관계를 다루고 있다.

<논제 2-1(a)>에서는 제시문 <가>에서 설명한 <게임1>에서 순서쌍 $(1, c+2)$가 필승전략임을 증명하는 문제를 다루고 있다.

<논제 2-1(b)>에서는 제시문 <가>에서 설명한 <게임2>에서의 필승전략을 이해하여 가로와 세로의 길이가 같은 체스판 위에서 $(0,0)$을 제외하고 무작위로 선택한 위치가 필승전략이 될 확률을 구하는 문제를 다루고 있다.

<논제 2-2(a), 2-2(b)>는 제시문 <나>에서 언급된 탄산음료수 깡통의 제작비용 절약의 관점에서, 두 가지 다른 경우 알루미늄판의 넓이가 최소가 되는 밑면의 반지름을 구하는 문제를 다루고 있다.

<논제 2-2(c)>는 논제 2-2(a), 2-2(b)에서 밑면의 반지름을 구한 두 방법을 비교할 때, 어떤 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있는지에 대한 수리적 이해를 묻는 문제를 다루고 있다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

적용 교육과정	1. 제시문 <가> [확률과 통계] 순열과 조합-경우의 수 [수학I] 도형의 이동-평행이동 ① '경우의 수'를 이해한다. ② '점의 평행이동'을 이해한다. 2. 제시문 <나> [미적분I] 도함수의 활용-함수의 증가와 감소, 극대와 극소 [미적분II] 미분법-여러가지 미분법, 도함수의 활용 ① '도함수의 활용을 이해한다. ② '여러가지 미분법'을 이해한다. ③ '함수의 최댓값과 최솟값'을 이해한다. 3. 문제 2-1(a) [확률과 통계] 순열과 조합-경우의 수 ① '경우의 수'를 이해한다. 4. 문제 2-1(b) [확률과 통계] 순열과 조합-경우의 수 [확률과 통계] 확률-확률의 뜻 ① '경우의 수'를 이해한다. ② '수학적 확률'을 이해한다. 5. 문제 2-2(a),(b),(c) [미적분I] 도함수의 활용-함수의 증가와 감소, 극대와 극소 [미적분II] 미분법-여러가지 미분법, 도함수의 활용 ① '도함수의 활용'을 이해한다. ② '여러가지 미분법'을 이해한다. ③ '함수의 최댓값과 최솟값'을 이해한다. ④ '이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정'을 이해한다.
성취기준	1. 제시문 <가> ① 제시문에서 상황에 맞는 경우를 구분한다. ② '게임을 통한 수학적 사고'를 이해한다. 2. 제시문 <나> ① 제시문에서 언급하는 내용을 '함수의 최솟값'의 지식을 바탕으로 이해한다. ② 함수의 최솟값을 위한 조건을 얻는다. 3. 문제 2-1(a) ① 제시문 <가>의 <게임1>의 정확한 이해를 바탕으로 어떤 순서쌍이 게임을 승리로 이끄는 이유를 각 경우에 따라 설명한다. 4. 문제 2-1(b) ① 제시문 <가>의 <게임2>의 정확한 이해를 바탕으로 어떤 위치가 게임을 승리로 이끄는 이유를 설명하고, 이와 연관된 확률을 구한다. 5. 문제 2-2(a),(b) ① 문제의 풀이를 위한 적당한 식과, 이 식의 변수들의 범위를 파악한다. ② '함수의 극대와 극소', '함수의 최댓값과 최솟값'을 이용하여 판의 넓이가 최소가 되는 반지름을 구한다. 6. 문제 2-2(c) ① 문제 2-2(a)와 2-2(b)의 각 방법과 풀이의 정확한 이해를 바탕으로 어떤 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있는지를 판단한다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	이준열외 9인	천재교육	2016	196
	미적분I	이주열외 9인	천재교육	2016	138, 145
	미적분II	이주열외 9인	천재교육	2016	120, 145
	확률과 통계	이주열외 9인	천재교육	2016	10, 94
기타	Wythoff's Game 인터넷주소: http://math.rice.edu/~michael/teaching/2012Fall/Wythoff.pdf	Kimberly Hirschfeld-Cotton		2008	1 - 7

문항 해설

경우의 수, 함수, 미분 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 확률과 통계 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문을 읽고 응용문제에 대한 수학적 이해, 경우의 수, 최대최소, 확률에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1(a)	① 플레이어 B가 바구니 X에서 공을 꺼내거나, 꺼내지 않거나 두 가지 경우를 취할 수 있음을 파악한다.	3
	② 플레이어 B가 바구니 X에서 공을 꺼내는 경우에 플레이어 A가 승자가 됨을 보인다.	4
	③ 플레이어 B가 바구니 X에서 공을 꺼내지 않는 경우에 플레이어 A가 승자가 됨을 보인다.	4
2-1(b)	① 체스판 위의 필승전략을 모두 구한다.	4
	② 문제의 답인 확률을 구한다.	4
2-2(a)	① 직사각형의 넓이 A를 r의 함수로 나타낸다.	3
	② $A'(r)$과 $A''(r)$을 구한다.	3
	③ '이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정'에 의하여, 넓이 A가 최소가 되는 r을 구한다.	5
2-2(b)	① 직사각형의 넓이 B를 r의 함수로 나타낸다.	3
	② 원기둥의 높이와 밑면의 반지름과의 관계 $h \geq 4r$를 파악한다.	3
	③ B를 r의 감소함수임을 이용하여 넓이 B가 최소가 되는 r을 구한다.	5

하위 문항	채점 기준	배점
2-2(c)	① 2-2.a에서 구한 넓이 $A(r)$에서 $A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right)=3\left(\sqrt[3]{4\pi}\right)$을 구한다.	3
	② 2-2.b에서 구한 넓이 $B(r)$에서 $B\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right)=\frac{2\pi+2}{\pi}\sqrt[3]{4\pi}$을 구한다.	3
	③ $A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right)$과 $B\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right)$을 비교하여 2-2.b에서의 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있음을 파악한다.	3

예시 답안

■ 2-1(a)

플레이어 A가 순서쌍 $(1, c+2)$를 만들었다고 가정하고 A가 승자임을 보이자. 다음으로 플레이어 B는 바구니 X에서 공을 꺼내거나, 꺼내지 않거나 두 가지 경우를 취할 수 있다.

(i) 만일 플레이어 B가 바구니 X에서 공을 꺼내면 바구니 X의 공의 개수는 0이 되고, 이 경우 플레이어 A는 바구니 Y에서 모든 공을 꺼내어 순서쌍 $(0,0)$를 만들게 되므로 승자가 된다.

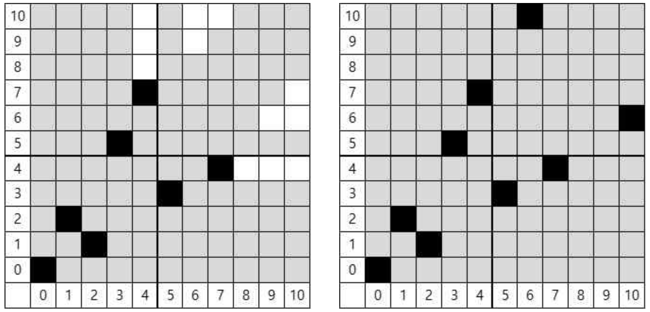
(ii) 만일 플레이어 B가 바구니 X에서 공을 꺼내지 않는 경우에는 바구니 Y에서 1개 이상의 공을 꺼내게 되어 순서쌍은 $(1,y)$ (단, $0 \leq y \leq c+1$)이 된다. 이 경우 $y-1$의 절대값이 c보다 작거나 같으므로 플레이어 A는 두 바구니에서 모든 공을 꺼낼 수 있다. A는 순서쌍 $(0,0)$를 만들게 되므로 승자가 된다.

■ 2-1(b)

다음 그림과 같이 지문에서 제시된 방법을 이용하여 체스판 위의 필승전략을 모두 구하면

$$(1,2),\ (2,1),\ (3,5),\ (5,3),\ (4,7),\ (7,4),\ (6,10),\ (10,6)$$

이다.



체스판위의 칸은 $(0,0)$를 제외하면 모두 120개이므로 구하고자하는 확률은 $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$이다.

(답) $\frac{1}{15}$

■ 2-2(a)

사용되는 직사각형의 넓이를 A라 하면, $A = 2\pi r(2r+h)$이고, 부피가 1이므로 $1 = \pi r^2 h$이다. 따라서 $A = 4\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right) = 4\pi r^2 + \frac{2}{r}$ 이다. 즉, A는 변수 r의 함수이다. $A(r) = 4\pi r^2 + \frac{2}{r}$ 라하고 미분을 이용하여 $A(r)$이 최소가 되는 r의 값을 구하자.

$$A'(r) = 8\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{8\pi r^3 - 2}{r^2} = 8\pi r - \frac{2}{r^2}, \qquad A''(r) = 8\pi + \frac{4}{r^3}$$

이므로, $A'(r) = 0$이 되는 양수 r을 구하면

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$$

이고, $A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right) = 8\pi + 4(4\pi) = 24\pi > 0$이다. 따라서 '이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정'에 의하여, 넓이 A는 $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ 일 때 최소가 된다.

(답) $\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$

■ 2-2(b)

사용되는 직사각형의 넓이를 B라 하면, $B = (2\pi r + 2r)h$이고, 부피가 1이므로 $1 = \pi r^2 h$이다. 따라서 $B = \frac{2\pi r + 2r}{\pi r^2} = \frac{2\pi + 2}{\pi r}$ 이다. 한편 문제의 조건으로부터 $h \geq 4r$이다. 그런데 $h = \frac{1}{\pi r^2}$ 이므로 $r^3 \leq \frac{1}{4} h r^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{\pi r^2} r^2 = \frac{1}{4\pi}$ 이다. 이제 B는 r의 감소함수이므로 $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ 일 때, 넓이 B는 최소가 된다.

(답) $\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$

■ 2-2(c)

2-2.a에서 구한 넓이는 $A(r) = 4\pi r^2 + \frac{2}{r}$ 이므로 $A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right) = 3(\sqrt[3]{4\pi})$ 이다. 2-2.b에서 구한 넓이는 $B(r) = \frac{2\pi + 2}{\pi r}$ 이므로 $B\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right) = \frac{2\pi + 2}{\pi}\sqrt[3]{4\pi}$ 이다. $A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right) > B\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right)$ 이므로 2-2.b에서의 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있다.