2016학년도 수시모집

과학인재 논술시험
문제 해설지 - 수학

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

2016학년도 수시모집

과학인재 논술시험 문제 해설지 (수학)

■ 출제의도 및 해설

고교 교과 과정 중 평면좌표, 공간좌표, 수열, 함수와 그래프, 원과 직선의 방정식, 삼각함수, 함수의 극한, 정적분 등의 영역에서 출제되었다. 이들은 이과 계열 수학능력에서 중요한 능력들이며, 관련 교과과정을 이해하고 있다면 해결할 수 있는 문제들이다. 각 문항에 대한 자세한 해설은 다음과 같다.

[문제 1]

문제에서 주어진 상황을 좌표평면 위에 적절히 대입하여, 직선의 방정식과 점의 좌표를 통해 유리함수의 최솟값을 유도하는 과정을 정확히 이해하고 있는지에 대해 평가하고자 한다. 내분점의 정의에 대한 올바른 이해와 함께, 구간별로 정의된 함수의 그래프에 대한 이해가 필요하다.

[문제 2]

본 문제는 고등학교 교과과정 중 함수의 그래프, 기하 및 벡터: 공간좌표, 수학 II: 정적분의 계산, 정적분의 활용 영역에서 출제되었다. 문제의 조건에 맞게 함수의 식을 세울 수 있는지, 이를 적분하여 원하는 값을 도출할 수 있는지를 묻는 문제이다. 이는 이과분야 수학능력에 꼭 필요한 중요한 능력이며, 관련 고교 과정 내용을 잘 숙지하고 있다면 설명할 수 있는 문제들이다.

[문제 3]

주어진 기하학적 내용들을 이해하고 이를 해결하기 위하여 적절하게 식을 세워 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다. 기하학적 내용을 수식으로 정리하여 해답을 도출하는 능력은 이과 수학능력의 중요한 부분 중의 하나이다. 고교 교과과정 중 수학: 원의 방정식, 직선의 방정식, 연립방정식, 부등식의 영역, 수학 II: 함수의 극한 등의 단원에서 출제되었으며, 상기한 단원의 내용을 잘 이해하고 있다면 풀 수 있는 문제이다.

[문제 4]

지면 위를 구르는 정n각형의 움직임으로부터, 한 점의 이동경로를 삼각함수를 통해 올바르게 수식화하는지와, 이를 통해 얻을 수 있는 수식과 구분구적법에 의한 정적분과의 관계를 올바르게 이해하는지를 평가하고자 한다. 정n각형의 꼭짓점 사이의 거리는 삼각함수를 활용하여 도출할 수 있으며, 이동거리에 대한 식은 구분구적법에 의해 $y=\sin x$함수의 정적분과 밀접한 관계가 있음은 정적분의 기본정리로부터 유도된다.

2016학년도 수시모집

과학인재 논술시험 문제 해설지 (수학)

■ 채점기준

[문제 1] [15점]

[1-i] [10점]

- 주어진 상황을 좌표평면 위에 올바르게 표현하고, 점 Q를 선분 AP의 중점으로 잡는다.
- S_2의 값을 직선의 기울기에 대한 식으로 올바르게 표현한다.
- 정확한 논리로 $\frac{1}{7}$을 도출한다.

[1-ii] [5점]

- 면적 S_2를 가지는 영역의 모양을 정확히 묘사한다.
- 올바른 논리로 $\frac{11}{2}+\sqrt{17}$을 도출한다.

[문제 2]

- t초후에 덮개가 만족하는 방정식을 세울 수 있다.
- 그래프 아래의 면적이 원래의 물의 단면적과 같을 때 멈추게 된다는 사실을 제시할 수 있다.
- 이로부터 덮개가 멈추는 시간을 제시할 수 있다.

[문제 3]

- x_a y_a가 만족하는 방정식을 유도한다
- 이를 이용하여 x_a y_a의 값을 도출한다.
- 올바른 논리로 극한값이 1임을 보인다.

[문제 4] [15점]

[4-i] [5점]

- 반지름이 $\sqrt{3}$이고 중심각이 120°인 호의 길이는 $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$임을 보인다.
- $L_3=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$임을 보인다.

[4-ii] [5점]

- 올바른 논리로 $L_n=\frac{4\pi}{n}\times\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right)$임을 보인다.

[4-iii] [5점]

- 정적분의 기본정리와 구분구적법으로부터 $\lim_{n\to\infty}L_n=4\int_0^{\pi}\sin x\,dx=4[-\cos x]_0^{\pi}=8$를 구한다.

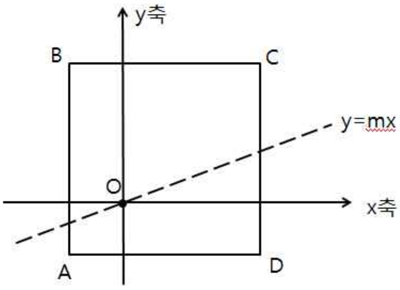
2016학년도 수시모집

과학인재 논술시험 문제 해설지(수학)

■ **모범답안**

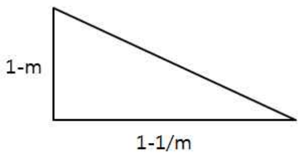
[문제 1]

[1-i] 점 Q를 좌표평면의 원점 O라 하고, 선분 AD와 AB를 각각 x축과 y축에 평행하다고 가정하면, 점 $\mathrm{Q}=\mathrm{O}$를 지나는 직선의 방정식은 $y=mx$이고 m은 그 기울기이다.



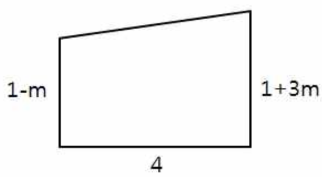
대칭성에 의해 $-1 \le m \le 1$이라고 가정할 수 있다. 이 때, 직선 아래쪽에 위치한 영역의 면적이 더 작으므로, 그 값이 S_2가 된다. $S_1+S_2=16$이므로, $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{S_2}{16-S_2}$는 $S_2<16$에 대하여 증가함수이다. 따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}$의 최솟값을 찾기 위해서는 S_1의 최솟값을 찾으면 된다.

(a) 만약 $-1 \le m \le -\dfrac{1}{3}$이라면, 아래쪽 영역은 밑변의 길이가 $1-\dfrac{1}{m}$이고 높이가 $1-m$인 직각삼각형이 되므로, $S_2=\dfrac{1}{2}(1-m)\left(1-\dfrac{1}{m}\right)=1-\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{m}\right)$이 된다.



따라서 S_2의 최솟값은 $m=-1$일 때 얻어지고, 그 값은 2이다.

(b) 만약 $-\dfrac{1}{3} \le m \le 1$이라면, 아래쪽 영역은 다음 그림과 같은 사다리꼴이 되고, 그 넓이는 $4(1+m)$이 된다.



따라서 이 경우 S_2의 최솟값은 $m=-\dfrac{1}{3}$일 때 얻어지고 그 값은 $\dfrac{8}{3}$이다.

이를 종합하면 S_2의 최솟값은 2이고, 그 때 $\dfrac{S_2}{S_1}$의 값은 $\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$이다.

과학인재 논술시험 문제 해설지 (수학)

[1-ii] [1-i]로부터 $m=-\frac{1}{3}$일 때 $\frac{S_2}{S_1}$의 값은 $\frac{1}{5}$이다. 따라서 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{13}>\frac{1}{5}$일 때, 직선 아래쪽 영역은 사다리꼴 모양이고, $4(1+m)=3$으로부터 $m=-\frac{1}{4}$임을 알 수 있다. 이로부터 이 사다리꼴의 네 변의 길이는 각각 4, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{17}$이므로, 그 합은 $\frac{11}{2}+\sqrt{17}$이다.

[문제 2]

t초후에 덮개의 방정식은

$$z=25-e^x\sin x-t$$

로 주어진다. 그래프 아래의 면적이 원래의 물의 단면적과 같을 때 멈추게 되므로

$$\int_0^\pi 25-e^x\sin x-t\ dx=5\pi$$

가 성립한다. 좌변의 적분을 계산하면

$$\int_0^\pi 25-e^x\sin x-t\ dx=25\pi-\frac{e^\pi+1}{2}-\pi t$$

이다. 따라서

$$25\pi-\frac{e^\pi+1}{2}-\pi t=5\pi,$$

즉, $t=20-\frac{e^\pi+1}{2\pi}$ 초에서 덮개의 움직임이 멈춘다.

[문제 3]

BC, BA의 방정식은 각각

$$BC: y=-\sqrt{a^2-1}\,x+a$$
$$BA: y=-x+a$$

이다. 내접원의 중심에서 삼각형 ABC의 각 변으로의 거리가 y_a이므로,

$$y_a=\frac{|\sqrt{a^2-1}\,x_a+y_a-a|}{a}=\frac{|x_a+y_a-a|}{\sqrt{2}} \qquad - \quad (1)$$

그런데 P는 BA의 아래쪽에 BC의 위쪽에 위치하므로 (1) 식은

$$y_a=\frac{(\sqrt{a^2-1}\,x_a+y_a-a)}{a}=\frac{-(x_a+y_a-a)}{\sqrt{2}}$$

가 된다. 정리하면 x_a, y_a에 관한 다음과 같은 연립 방정식을 얻는다.

$$\sqrt{a^2-1}\,x_a-(a-1)y_a=a,$$
$$x_a+(\sqrt{2}+1)y_a=a$$

이를 풀면

$$x_a = \frac{a(a+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{a^2-1}+a-1},\ y_a = \frac{a(\sqrt{a^2-1}-1)}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{a^2-1}+a-1}$$

따라서

$$\lim_{a\to\infty}\frac{y_a}{x_a} = \lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{a^2-1}-1}{a+\sqrt{2}} = \lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{a}}{1+\frac{\sqrt{2}}{a}} = 1$$

[문제 4]

[4-i] $n=3$인 경우, 점 P_1은 반지름이 $\sqrt{3}$이고 중심각이 $\frac{2\pi}{3}$인 원호를 따라 두 번 이동한다. 따라서 이동경로의 길이는 $L_3 = 2\times\sqrt{3}\times\frac{2\pi}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$이다.

[4-ii] 임의의 자연수 $n\ge 3$에 대하여, 정n각형을 한 바퀴 굴릴 때, 점 P_1은 반지름이 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_\mathrm{i}$ $(i=1,\ \cdots, n)$이고 중심각이 $\frac{2\pi}{n}$인 원호를 따라 한 번씩 이동한다. 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_\mathrm{i}$의 길이는 $2\sin\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right)$이므로, 이동경로의 길이는 $L_n = \frac{4\pi}{n}\times\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right)$이다.

[4-iii] 정적분의 정의로부터 $\lim_{n\to\infty}L_n = 4\int_0^\pi \sin x\,dx = 4[-\cos x]_0^\pi = 8$이다.