세종대학교 2017학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안

[문제 1]

(1-1) 점 $\mathrm{A}(0,0,d)$ 와 $\mathrm{P}(a,b,c)$ 를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (a, b, c-d)$$

이므로 이 직선의 방정식을 매개변수 t 를 이용하여 나타내면

$$x = at\,,\ y = bt\,,\ z = d + t(c-d)$$

이다. $z = 0$ 이면 $t = \dfrac{d}{d-c}$ 이고 이를 직선의 식에 다시 대입하면 다음을 얻는다.

$$x = \frac{ad}{d-c}\,,\ y = \frac{bd}{d-c}$$

(1-2) 점 $\mathrm{A}(0,0,3)$ 에서 나온 빛이 $\mathrm{P}(a,1,c)$ 를 지날 때를 생각하면 위의 풀이에서 $b = 1$, $d = 3$ 인 경우이므로

$$x = \frac{3a}{3-c}\,,\ y = \frac{3}{3-c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.1)$$

인데 P 가 D 의 위쪽 경계에 위치해야 하므로

$$(a-1)^2 + c^2 = 1\ (c \ge 0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.2)$$

을 만족시킨다. 식 (1.1)에서 $c = 3 - \dfrac{3}{y} \ge 0$ 이므로 $y \ge 1$ 이고, $x = ay$ 이므로 $a = \dfrac{x}{y}$ 이다. 이를 식 (1.2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{y}\right)^2 = 1\ (y \ge 1)$$

이 식의 양변에 y^2 을 곱하여 간단히 하면 곡선 S 의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-y)^2 + (3y-3)^2 = y^2\ \ (y \ge 1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.3)$$

(1-3) 식 (1.3)으로 주어진 곡선 S 의 식에서 $\dfrac{dy}{dx} = 0$ 일 때 y 좌표가 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서 y 를 x 의 함수로 보고 음함수 미분법을 적용하여 식 (1.3)의 양변을 변수 x 에 관하여 미분하면

$$2(x-y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) + 2(3y-3)\cdot 3\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.4)$$

이므로 이 식을 이용하여 계산하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{9y-x-9} = 0$$

에서

$$y = x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.5)$$

를 얻는다. 이를 식 (1.3)에 다시 대입하면

$$8y^2 - 18y^2 + 9 = (2y-3)(4y-3) = 0$$

이므로 $y = \dfrac{3}{2}$ 또는 $y = \dfrac{3}{4}$ 인데 $y \ge 1$ 이므로 $y = \dfrac{3}{2}$ 이다. 식 (1.5)에서 $x = \dfrac{3}{2}$ 이므로 y 값이 최대가 되는 점 $\mathrm{R}(x,y)$ 의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ 이다.

세종대학교 2017학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안

[문제 2]

(2-1) $g(x)$를 나타내는 적분식을 $u=x-t$로 두고 치환적분하여 계산하면

$$g(x)=\int_0^x t\{f(x-t)\}^2\,dt=\int_0^x (x-u)\{f(u)\}^2\,du$$

이므로, 주어진 조건식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$2g(x)=2\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sin^2 x$$

따라서 다음이 성립한다.

$$g(x)=\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\sin^2 x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (2.1)$$

그러므로 $g(\pi)=\dfrac{\pi^2}{4}$이다.

(2-2) 식 (2.1)의 적분식을 전개하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$x\int_0^x \{f(t)\}^2\,dt-\int_0^x t\{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\sin^2 x$$

이 식의 양변을 변수 x에 대하여 미분하면 미적분의 기본정리로부터 다음을 얻는다.

$$\int_0^x \{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\cos x$$

이 식의 양변을 변수 x에 대하여 다시 한 번 미분하면 다음을 얻는다.

$$\{f(x)\}^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 x=\sin^2 x$$

$f(x)$는 연속함수이므로 각각의 구간 $[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots,99)$에서

$$f(x)=\sin x \quad \text{또는} \quad f(x)=-\sin x$$

이다. 따라서

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=2\,,\quad \int_0^\pi(-\sin x)\,dx=-2$$

임을 이용하면 $\displaystyle\int_0^{100\pi} f(x)\,dx$의 값으로 가능한 것은 다음과 같다.

$$-200\,,\ -196\,,\ -192\,,\ \cdots,\ -4\,,\ 0\,,\ 4\,,\ \cdots,\ 192\,,\ 196\,,\ 200$$

(2-3) 닫힌구간 $[0,100\pi]$에서 양수 k에 대하여 $p(x)=k\,f(x)$가 확률밀도함수가 되기 위해서는

$$p(x)\ge 0$$

이어야 하므로 $f(x)=|\sin x|$이고

$$\int_0^{100\pi} p(x)\,dx=k\int_0^{100\pi}|\sin x|\,dx=200k=1$$

이므로 $k=\dfrac{1}{200}$이다. 따라서 확률밀도함수 $p(x)$는 다음과 같다.

$$p(x)=\frac{1}{200}|\sin x|$$

또한 부분적분법을 이용하여 연속확률변수 X의 평균을 계산하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{100\pi} x\,p(x)\,dx \\
&= \frac{1}{200}\int_0^{100\pi} x|\sin x|\,dx \\
&= \frac{1}{200}\left\{\int_0^{\pi} x\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\,dx \right.\\
&\qquad \left. - \int_{3\pi}^{4\pi} x\sin x\,dx + \cdots + \int_{98\pi}^{99\pi} x\sin x\,dx - \int_{99\pi}^{100\pi} x\sin x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{200}\left\{[\sin x - x\cos x]_0^{\pi} - [\sin x - x\cos x]_{\pi}^{2\pi} + [\sin x - x\cos x]_{2\pi}^{3\pi}\right.\\
&\qquad \left. - [\sin x - x\cos x]_{3\pi}^{4\pi} + \cdots + [\sin x - x\cos x]_{98}\right. \\
&= \frac{1}{200}\{\pi + (2\pi+\pi) + (3\pi+2\pi) + \cdots + (99\pi+98\pi) + (100\pi+99\pi)\} \\
&= \frac{1}{200}(\pi + 3\pi + 5\pi + \cdots + 197\pi + 199\pi) \\
&= 50\pi
\end{aligned}$$

=> 2-3번 문항(연속확률변수에서의 평균을 구하는 과정)은 교육과정의 개정으로 인하여 2017학년도 출제범위에서 제외되었습니다. 논술고사 준비 시 해당 문항 이외의 기출문제를 참고하여 주시기 바라며, 수험생 여러분께 혼동을 드린 점 양해 부탁드리겠습니다.

[문제 3]

(3-1) $y' = ae^{ax}$ 임을 이용하면 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = ae^{ac}(x-c) + e^{ac}$$

(3-2) 점 Q 의 x 좌표를 α 라 하면 곡선 $y = e^{ax}$ 과 포물선 $y = x^2$ 의 식과 각각의 도함수로부터 다음 식을 얻는다.

$$\alpha^2 = e^{a\alpha},\ 2\alpha = ae^{a\alpha}$$

이 식을 연립하여 풀면

$$\alpha = e,\ a = \frac{2}{e}$$

이고, Q 의 좌표는 (e, e^2) 이다.

(3-3) 곡선 $y = e^{\frac{x}{3}}$ 과 $y = x^2$ 은 제2 사분면의 한 점에서 만나는데 그 점의 x 좌표를 β 라 하면 함수 $f(x) = |e^{\frac{x}{3}} - x^2|$ 은 $x = \beta$ 인 점에서 미분가능하지 않다.

(왜냐하면 $u(x) = e^{\frac{x}{3}} - x^2$ 라 할 때 $f(x) = |u(x)|$ 이고 $u(\beta) = 0$, $u'(\beta) > 0$ 이므로

세종대학교 2017학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{u(\beta+h)-u(\beta)}{h} = u'(\beta) > 0 \text{이고}$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-\{u(\beta+h)-u(\beta)\}}{h} = -u'(\beta) < 0$$

이기 때문이다. 일반적으로 미분가능한 함수 $v(x)$에 대하여 $v(c)=0$일 때 함수 $|v(x)|$가 $x=c$에서 미분가능하기 위해서는 $v'(c)=0$이어야 한다. 따라서 미분가능한 함수 $v_1(x)$와 $v_2(x)$에 대하여 $v_1(c)=v_2(c)$일 때 함수 $|v_1(x)-v_2(x)|$가 $x=c$에서 미분가능하기 위해서는 $v_1{}'(c)=v_1{}'(c)$이어야 한다. 즉 함수 $v_1(x)$와 $v_2(x)$는 $x=c$에서 공통 접선을 가져야 한다.)

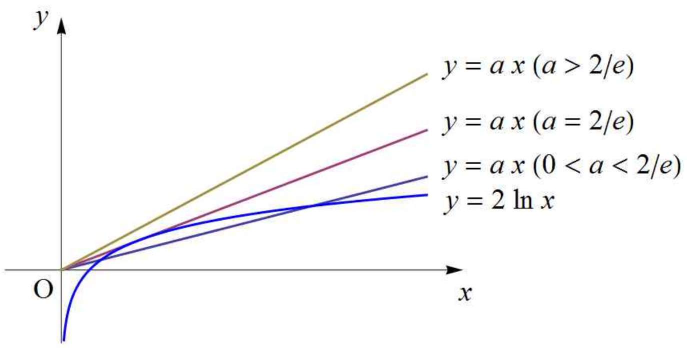
(3-2)의 풀이로부터 곡선 $y=e^{ax}$과 곡선 $y=x^2$은

(i) $a=\frac{2}{e}$일 때 제1사분면의 한 점에서 공통 접선을 갖고

(ii) $0<a<\frac{2}{e}$ 일 때 제1사분면의 두 점에서 만나고

(iii) $\frac{2}{e}<a$일 때 제1사분면에서는 만나지 않는다.

참고로 $x>0$일 때, 방정식 $e^{ax}=x^2$의 양변에 자연로그를 취하면 $ax=2\ln x$이므로 직선 $y=ax$와 곡선 $y=2\ln x$의 위치관계를 생각하면 다음 그림으로부터 (ii)와 (iii)의 결과를 쉽게 확인할 수 있다.



그런데 이 문제에서 $a=\frac{1}{3}<\frac{2}{e}$이므로 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$과 곡선 $y=x^2$은 제1사분면의 두 점에서 만나며 이 점들에서는 위와 같은 이유로 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다. 따라서 함수 $f(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

(3-4) 앞에서와 같은 방법으로 계산하면 k가 짝수일 때, 양의 실수 a에 대한 $y=e^{ax}$의 그래프와 $y=x^k$의 그래프의 개형으로부터 두 곡선은 적어도 제2사분면의 한 점에서 만나며 그 점의 x좌표를 β라 하면 $p_k(x)=|e^{ax}-x^k|$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다. k가 홀수일 때는 곡선 $y=e^{ax}$와 $y=x^k$는 제2사분면에서 만나지 않는다.

세종대학교 2017학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안

제1사분면에서는 $a=\frac{k}{e}$일 때 $y=e^{ax}$는 x^k와 한 점에서 공통접선을 갖고, $a<\frac{k}{e}$이면 두 곡선은 두 점에서 만나며, $a>\frac{k}{e}$이면 만나지 않는다. 따라서 다음과 같은 표를 얻는다.

	$p_k(x)=\lvert e^{ax}-x^k\rvert$의 미분불가능한 점의 수	
	$a<\frac{k}{e}$일 때	$\frac{k}{e}\le a$일 때
k가 홀수	2	0
k가 짝수	3	1

$a=\frac{11}{2e}$이면, $\frac{5}{e}\le a<\frac{6}{e}$이므로 $k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\cdots$ 일 때

$p_k(x)=\lvert e^{ax}-x^k\rvert$으로 정의된 함수 $p_k(x)$의 미분가능하지 않은 점의 수는 각각

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,3,2,3,2,3,2,\ \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.1)$$

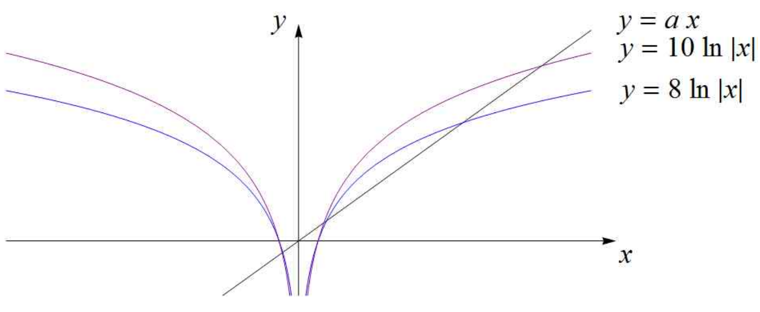
이다. $g(x)=\sum_{k=1}^{n}\lvert e^{ax}-x^k\rvert$의 미분가능하지 않은 점의 수는 식 (3.1)에 나타낸 수열의 첫째 항부터 제n항까지의 합과 같다. 이는 서로 다른 k에 대하여 $p_k(x)$의 미분가능하지 않은 점의 위치가 모두 다르기 때문이다. 왜냐하면, $e^{ax}=x^k$일 때 양변에 자연로그를 취하면
k가 홀수일 때

$$ax=k\ln x\ (x>0)$$

이고, k가 짝수일 때

$$ax=k\ln\lvert x\rvert\ (x\neq 0)$$

인데, 직선 $y=ax$와 이들 곡선의 교점의 위치는 k가 달라지면 모두 다르게 나타나기 때문이다. (예를 들어 아래 그림은 $k=8$일 때와 $k=10$일 때를 설명하는 그림이다.)



결국 식 (3.1)에 나타낸 수열의 첫째 항부터 제n항까지의 합이 17이 되려면 $n=11$이다.