출제의도 (자연계열 B형)

1. 문항1

ㅁ 평가 형태 :문제 해결 능력 평가
주어진 튜브의 부피를 회전체의 부피 문제로 바꾸어 해결할 수 있는지를 확인하는 문제 해결 능력 평가 문항이다.
ㅁ 평가 요소
: 회전체의 부피를 고등학교에서 배운 정적분을 이용하여 식으로 나타낼 수 있고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 것이 주된 평가 요소이며, 부수적으로 정적분의 성질과 주어진 단계에 따라 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항2

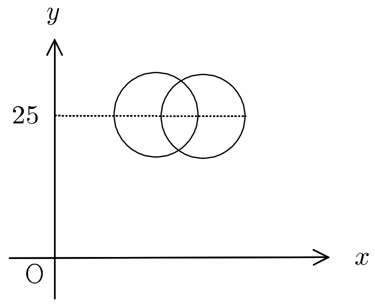
ㅁ 평가 형태 :논리적 사고 능력 평가
주어진 단계에 따라 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
ㅁ 평가 요소
: 주어진 함수의 그래프를 해석할 수 있는지, 연속함수에 대한 중간값 정리, 미분가능한 함수에 대한 평균값 정리를 이해하고 활용할 수 있는지, 주어진 곡선을 함수의 그래프로 이해할 수 있는지를 종합적으로 평가한다.

3. 문항3

ㅁ 평가 형태 : 이해 능력 평가
주어진 제시문을 읽고 이해하여 제시문에서 사용된 공통된 수학적 발견을 할 수 있고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
ㅁ 평가 요소
: 이진법 전개, 무한급수가 수렴하는 값에 대한 기본적인 개념을 이해하는지와, 제시문을 읽고 이해하는지를 평가한다.

답안 예시 (자연계열 B형)

• 1-1번 문항



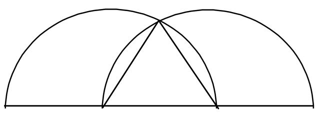
두 원의 중심거리는 6이고 원의 중심에서 x축까지의 최단거리는 25이다.

• 1-2번 문항

회전한 입체의 부피는 $\pi\int_a^b (c+f(x))^2\,dx - \pi\int_a^b (c-f(x))^2\,dx$ 이다. 이것을 계산하면 답은 $4c\pi\int_a^b f(x)\,dx$이다.

• 1-3번 문항

(1-2)의 답에서 나오는 $\int_a^b f(x)\,dx$는 튜브의 단면의 면적의 반이고 $2\int_a^b f(x)\,dx$는 튜브의 단면의 면적이 된다. 그리고 $c=25$이다. 이제 튜브의 단면의 면적의 반을 구하자.



$\int_a^b f(x)\,dx = \pi\times 6^2\times\frac{2}{3}+9\sqrt{3}=24\pi+9\sqrt{3}$ 이므로 답은

$$4c\pi\int_a^b f(x)\,dx = 100\pi(24\pi+9\sqrt{3}) = 2400\pi^2+900\sqrt{3}\,\pi$$

이다.

• 2-1번 문항

$h(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{3}}-\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이라 할 때, 임의의 실수 c 에 대하여 $h(a)<c<h(b)$ 인 실수 a와 b가 존재한다. 따라서 중간값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=c$ 의 해가 존재한다.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos x - 1) \leq 0$$

이므로 $h(x)$가 (상수 함수 아닌) 감소 함수임을 알 수 있다. 따라서 방정식 $h(x) = 0$ 의 해는 유일하다.

(별해1) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$ 으로 정의해서 해의 존재성을 보여도 좋다. 이때 해의 유일성을 보이기 위해서는

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \cos x) \geq 0$$

이므로 $h(x)$가 (상수 함수 아닌) 증가 함수라는 점을 이용해야 한다.

(별해2) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + c - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$ 으로 정의하자. 이때 $h(a) < 0 < h(b)$ 인 실수 a 와 b 가 존재하므로, 중간값 정리에 의하여 해가 존재한다. 또한

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \cos x) \geq 0$$

이므로 $h(x)$가 (상수 함수 아닌) 증가 함수이므로 해는 유일하다.

- **2-2번 문항**

만약 $L(x_1, x_2) > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족하는 x_1, x_2 가 존재한다면,
평균값 정리에 의하여,
$f'(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$
을 만족하는 점 t가 구간 (x_1, x_2)안에 존재해야 하는데, $\cos x$ 값은 항상 1보다 작으므로 모순이다.

- **2-3번 문항**

구간 $(0, \pi)$에서 $g(x) = L(0, x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3}\, x}$ 라 하고, $g(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이라 하면, $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 연속임을 알 수 있다.
$0(= g(\pi)) < m < \frac{1}{\sqrt{3}}(= g(0))$ 이면 중간값 정리에 의하여 $g(x) = L(0, x) = m$ 을 만족하는 x 가 열린 구간 $(0, \pi)$에 존재함을 알 수 있다.

- **2-4번 문항**

함수의 정의로부터 y 축에 평행한 직선이 회전 이동한 그래프와 두 점에서 만나지 않는다는 조건을 사용해야 한다. (2-1), (2-2), (2-3)의 결과로부터, 문제에서 구하고자 하는 각 θ 의

최댓값 θ_m 은 방정식 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_m\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족하므로 $\theta_m=\frac{\pi}{3}$ 를 얻는다.

• 3-1번 문항

$0.0\dot{1}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$는 첫째 항이 $\frac{1}{2^2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이므로

$a=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$가 된다.

• 3-2번 문항

두 경우 모두 유한개의 $N_1>N_2>N_3>\cdots$값들을 이용해 M을 만들 때, M보다 작은 N_i중 가장 큰 값부터 M에서 빼기 시작해 0이 되도록 하면 사용하는 전체 N_i의 개수를 최소로 할 수 있다.

예를 들어, 제시문 (가)에서 500, 100, 50, 10에서 가장 큰 값인 500을 1370에서 두 번 뺄 수 있고,

$1370-2\times500=370$보다 작은 값 중 가장 큰 100을 세 번 빼면,
$1370-2\times500-3\times100=70$이 된다. 또, 70보다 작은 수 중 가장 큰 50을 빼면,

$1370-2\times500-3\times100-50-2\times10=0$이 되어 원하는 결과를 얻을 수 있다.

제시문 (나)에서도 같은 방법으로 사용하는 추의 개수가 최소가 되게 할 수 있다.

• 3-3번 문항

(1) $\frac{1}{3}$을 이진법으로 나타내라는 것은 $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots$들의 합으로 나타내라는 것이고, 소수점 아래 네 자리까지 구하라는 의미는

$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4}$중 합을 만들 때 사용되는 것을 구하라는 의미이므로 제시문 (가), (나)에 적용된 것과 같은 방법으로 구해보면, $\frac{1}{3}$보다 작은 수 중 가장 큰 값은 $\frac{1}{2^2}$, 또,

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{12}$보다 작은 수 중 가장 큰 값은 $\frac{1}{2^4}$.

따라서 $\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots$가 되고, 이진법의 소수점 아래 네 자리까지 구하면 $\underline{0.0101_{(2)}}$이다.

(2) 소수점 아래 네 자리까지 구한 값으로부터 $\frac{1}{3}$을 이진법으로 나타낸 수는 $0.\dot{0}\dot{1}$이 되리라고 예상할 수 있다. 이를 확인하기 위해 $0.\dot{0}\dot{1}$를 무한등비급수를 이용하여 기약분수로 나타내보면

$\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}=0.\dot{0}\dot{1}$이다.