

출제의도 (자연계열 A형)

1. 문항1

□ 평가 형태 : 문제 해결 능력 평가

실에 매단 반지의 위치를 구하는 문제로 본교 수리논술의 세 가지 형태 중 문제 해결 능력을 평가하는 문항에 해당된다.

□ 평가 요소

: 공간좌표와 공간도형의 개념들을 이용하여 실의 양 끝 점과 반지가 이루는 평면을 생각하고, 도형의 방정식에서 배우는 타원의 정의를 이용하여 실의 반지의 궤적이 이 평면 위에서 타원이 됨을 파악할 수 있는지 평가한다.

또, 직교좌표계를 적절히 도입하여 해당되는 타원의 표준형을 구하고, 직선과 이차곡선의 관계를 이차방정식이나 미분을 이용하여 구할 수 있는 지를 평가한다.

2. 문항2

□ 평가 형태 : 논리적 사고능력 평가

주어진 단계에 따라 논리적으로 사고할 수 있는 지를 평가하는 문항이다.

□ 평가 요소

: 역행렬의 정의, 이차 정사각행렬이 역행렬을 가질 필요충분조건, 행렬의 연산에 대한 성질을 정확하게 이해하고 있는지를 평가한다. 다항식 $(1+x)^3$ 의 전개와 행렬 $(I+A)^3$ 의 전개가 동일한 형태가 되는 이유를 아는지 평가한다.

3. 문항3

□ 평가 형태 : 이해능력 평가

주어진 제시문을 읽고, 함수가 점대칭이라는 의미와 평행이동에 대해 도형의 넓이가 변하지 않는다는 사실을 정적분과 관련지어 이해할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

□ 평가 요소

: 제시문에서 설명한 점대칭의 특성을 이해하고, 고등학교에서 배운 정적분의 성질과 결합하여 사고할 수 있는지와 정적분과 함수의 그래프로 둘러싸인 넓이의 관계를 이해하고 있는지를 평가한다.

답안예시 (자연계열 A형)

• 1-1번 문항

(1) 반지의 위치를 R 라 하면, 양 끝점으로부터 반지까지의 거리의 합 $\overline{PR} + \overline{RQ}$ 가 $4\sqrt{2}$ 로 일정하다. 따라서, 반지가 움직이는 궤적은 타원의 일부이다.

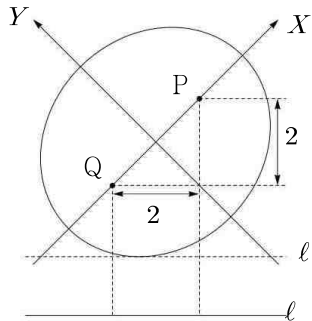
(2) 두 점 P, Q 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이고, P, Q 를 지나는 직선이 x축, P, Q 의 중점이 원점 이므로 초점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 0)$ 과 $(\sqrt{2}, 0)$ 이다.

또, 실의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 X 축과 만나는 점의 X 좌표는 $X = \pm 2\sqrt{2}$, Y 축과 만나는 점의 Y 좌표는 $\pm \sqrt{6}$ 이다.

따라서, 구하는 타원의 방정식은 $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{6} = 1$ 이다.

• 1-2번 문항

(단계 1) 반지가 평면과 가장 가까운 위치에서 멈췄을 때, 반지의 위치와 두 점 P, Q 가 이루는 평면 π 는 xy 평면과 수직인 평면이다, 이때, 두 평면의 교선을 ℓ 이라 하자.



(단계 2) 두 점 P, Q 에서 xy 평면까지 이르는 수직거리의 차가 $5 - 3 = 2$ 이고, 두 점에서 xy 평면 위에 내린 수선의 발 $(0, -\sqrt{3}), (1, 0)$ 사이의 거리도 2이므로 평면 π 위에서 직선 ℓ 과 X축이 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$ 이다. 따라서, XY 평면에서 직선 ℓ 의 방정식은 $Y = -X - m$ ($m > 0$) 꼴이다.

(단계 3) 직선 ℓ 의 절편 m 을 구하기 위해 점 P에서 ℓ 에 이르는 수직거리가 5임을 이용하면, $\frac{|\sqrt{2} + m|}{\sqrt{2}} = 5 \Leftrightarrow m = 4\sqrt{2}$ 이다.

• 1-3번 문항

(단계 1) 반지가 xy 평면과 가장 가까운 위치는 기울기가 -1 인 직선이 접선 ℓ' 이 되는 접점의 위치이므로 접선의 기울기가 -1 인 타원 위의 점을 구하자.

$\frac{X}{4} + \frac{Y}{3} \frac{dY}{dX} = 0$ 에서 $-1 = \frac{dY}{dX} = -\frac{3X}{4Y} \Leftrightarrow X = \frac{4}{3}Y$ 과 타원의 방정식으로부터 접점의 좌표는 $(X, Y) = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$ 이다.

(단계 2) 따라서, 지면까지의 거리는 접점 $(X, Y) = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$ 에서 직선 l 까지의 수직거리이므로 $\frac{\left|-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + 4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} = 4 - \sqrt{7}$ 이다.

• 2-1번 문항

$(E - N)(E + N + N^2) = E - N^3 = E$ 이다. 그러므로 역행렬의 정의에 의해 $E - N$ 의 역행렬은 $E + N + N^2$ 이다.

• 2-2번 문항

$(AN)^3 = A^3N^3 = O$ 이므로 (2-1)의 결과에 의해 $E - AN$ 의 역행렬은 $E + AN + (AN)^2 = E + AN + A^2N^2$ 이다.

• 2-3번 문항

N 이 역행렬 N^{-1} 을 가지면 $N^3 = O$ 에서 $N^{-1}N^3 = N^2 = O$ 이고 $N^{-1}N^2 = N = O$ 이 되어 모순이다. 따라서 N 은 역행렬을 가지지 않는다. 그러므로 $ac - b = 0$ 이다.

(별해)

$$N^3 = \begin{pmatrix} a^3 + 2ab + bc & a^2 + b + ac + c^2 \\ a^2b + abc + b^2 + bc^2 & ab + 2bc + c^3 \end{pmatrix} = O \text{ 를 풀면}$$

$N = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}$ 가 되어 $a(-a) - (-a^2) = 0$ 이 되어 N 은 역행렬을 가지지 않는다.

$b = -a^2, c = -a$ 이므로 $b = ac$ 이다.

• 2-4번 문항

(2-3)에서 $b = ac$ 이므로 $N = \begin{pmatrix} a & 1 \\ ac & c \end{pmatrix}$ 이고 $N^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ ac & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ ac & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ac & a + c \\ a^2c + ac^2 & ac + c^2 \end{pmatrix} = (a + c)N$ 이다. 그리고 $O = N^3 = (a + c)N^2 = (a + c)^2N$ 에서 $a + c = 0$ 이다. 그러므로 $N^2 = O$ 이다.

(별해) (2-3)의 별해처럼 $N = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}$ 이므로 $N^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix} = O$ 이다.

• 3-1번 문항

(풀이 1) $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 를 만족하는 (a,b) 를 직접 계산하여 $(2,0)$ 에 대해 점대칭인 것을 보일 수 있다.

(풀이 2) 이계도함수 $f''(x)=6x-12=0$ 이 되는 x 값을 구하여, $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 의 변곡점 $(2,0)$ 을 구한다.

다음 식으로부터 함수 f 가 이 점에 대해 대칭임을 보일 수 있다.

$$(1): \begin{aligned} & f(2+x)+f(2-x) \\ &= ((2+x)^3-6(2+x)^2+11(2+x)-6) \\ & \quad + ((2-x)^3-6(2-x)^2+11(2-x)-6)=0 \end{aligned}$$

또는

$$(2): \begin{aligned} g(x) &= f(x+2) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 11(x+2) - 6 \\ &= x^3 - x \end{aligned}$$

이 원점 대칭임을 보여도 된다.

• 3-2번 문항

점대칭의 정의에 따라

$$(1) g(h(a+x))+g(h(a-x))=g(h(a+x))+g(-h(a+x))$$

이고,

$$(2) g(h(a+x))+g(-h(a+x))=g(h(a+x))-g(h(a+x))=0$$

이므로, $(g \circ h)(x)$ 가 점 $(a,0)$ 에 대해 점대칭인 함수가 된다는 것을 알 수 있다.

또는 $(g \circ h)(x+a)$ 가 원점 대칭임을 보여도 된다. 이 경우에도 식 (1)과 (2)를 이용한다.

• 3-3번 문항

그림과 같이 피적분 함수가 점 $(2,4)$ 에 대해 점대칭이므로, 정적분의 값은 직선 $y=4$, $x=-1$, $x=5$ 와 x 축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이 24와 같다.

