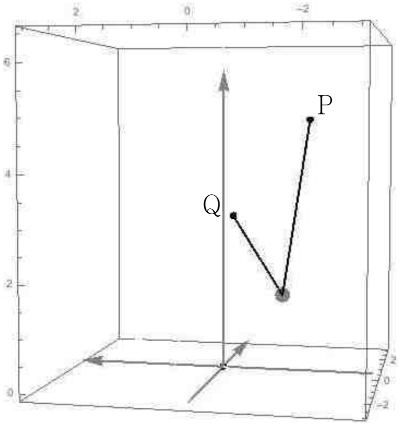
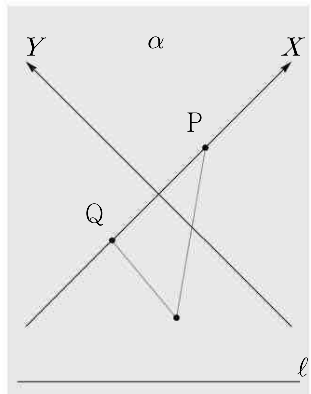
기출 문제 (자연계열 A형)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

반지를 끼운 실의 양 끝점이 좌표공간의 두 점 $\mathrm{P}(0,-\sqrt{3},5)$와 $\mathrm{Q}(1,0,3)$에 고정되어 있고, 실의 길이는 $4\sqrt{2}\,\mathrm{m}$이다. (모든 길이의 단위는 m로 생각한다.) 점 P의 위치에서부터 실을 타고 움직인 반지는 xy평면과 가장 가까운 위치에서 더 이상 움직이지 않게 된다.



[그림 1]



[그림 2]

(1-1) 점 P에서 출발한 반지가 실이 팽팽해진 이후 움직이는 궤적은 어떤 이차곡선의 일부가 된다. 이차곡선의 정의를 이용하여, 해당되는 이차곡선이 무엇인지 설명하시오.

한편, 반지가 xy평면과 가장 가까운 위치의 점 R에서 멈췄을 때, 세 점 P, Q, R는 한 평면 α를 결정한다. [그림 2]에서처럼 평면 α 위에서 두 점 P와 Q의 중점이 원점이 되도록 좌표축 X, Y를 잡자. 이때, XY평면 위에서 반지의 궤적을 포함하는 이차곡선의 방정식을 구하시오. (10 점)

(1-2) xy평면과 XY평면의 교선 ℓ의 방정식은 XY평면 위에서 $Y=aX+b$가 된다. 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. (10 점)

(1-3) 반지가 xy평면과 가장 가까운 위치의 점 R에서 멈췄을 때, 점 R에서 xy평면까지 이르는 수직거리를 구하시오. (10 점)

[문제 2] 양의 상수 a에 대하여 이차정사각행렬 $N=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$가 조건 $N^3=O$을 만족

한다. 각 물음에 답하시오.(단, O 은 2×2 영행렬이고, E 는 2×2 단위행렬이다.)

(2-1) 행렬 $E-N$ 의 역행렬이 $E+N+N^2$ 임을 근거를 들어 설명하시오. (10 점)

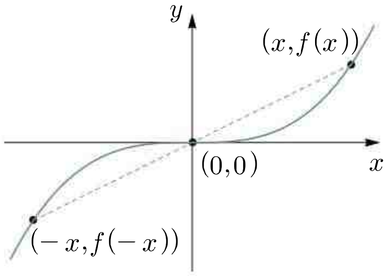
(2-2) 이차정사각행렬 A 가 $NA=AN$ 을 만족할 때, 행렬 $E-AN$ 의 역행렬을 구하시오. (10 점)

(2-3) 행렬 N 의 조건으로부터 N 의 역행렬이 존재하지 않음을 보이고, $b=ac$ 임을 보이시오. (10 점)

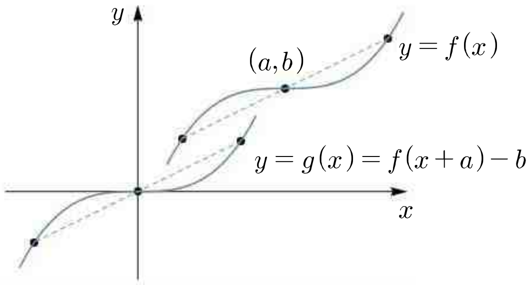
(2-4) $N^2=O$ 이 성립함을 보이시오. (10 점)

[문제 3] 아래 제시문을 읽고, 이를 이용하여 각 물음에 답하시오.

실수에서 정의된 함수 f가 모든 x에 대해 $f(-x)=-f(x)$를 만족하면 원점에 대해 점대칭인 함수가 된다. 이는 아래 [그림 1]에서 보듯이 두 점 $(x,f(x))$와 $(-x,f(-x))$의 중점이 $(0,0)$이 된다는 것과 같은 의미이다.



[그림 1]



[그림 2]

같은 방법으로 함수 f가 점 (a,b)에 대해 점대칭인 함수라는 말은 두 점 $(a-x,f(a-x))$와 $(a+x,f(a+x))$의 중점이 (a,b)라는 뜻이므로 모든 x에 대해

$$f(a+x)+f(a-x)=2b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

를 만족한다는 것을 알 수 있다.

또는, 점 (a,b)에 대해 점대칭인 함수 $y=f(x)$를 [그림 2]에서처럼 x축으로 $-a$만큼, y축으로 $-b$만큼 평행이동 시켜 얻은 함수를 $g(x)=f(x+a)-b$라 하자. 이때 $g(x)$가 원점에 대해 점대칭인 함수가 된다는 사실을 이용하여, $g(-x)=-g(x)$로부터 식 ①을 얻을 수도 있다.

(3-1) 함수 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$은 점 (a,b)에 대해 점대칭인 함수가 된다. 점 (a,b)를 구하시오. (10 점)

(3-2) 함수 $g(x)$가 원점 $(0,0)$에 대해 점대칭인 함수이고, 함수 $h(x)$가 점 $(a,0)$에 대해 점대칭인 함수이면, 합성함수 $(g \circ h)(x)$는 점 $(a,0)$에 대해 점대칭인 함수가 됨을 보이시오. (10 점)

(3-3) (3-1)과 (3-2)의 결과를 이용하여 정적분 $\int_{-1}^{5}\left(4+\sqrt[3]{x^3-6x^2+11x-6}\right)dx$의 값을 구하시오. (10 점)