문 항 2

문제

【문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) x에 대한 함수 y가 방정식 $f(x, y)=0$으로 주어졌을 때, y는 x의 음함수 표현이라고 한다. x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴일 때에는 y를 x의 함수로 보고, 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.

예를 들어 음함수 $x^2-2xy+4y^2=0$의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(2xy)+\frac{d}{dx}(4y^2)=0$$

$$2x-\left(2y+2x\frac{dy}{dx}\right)+8y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-4y} \quad (x\neq 4y)$$

(나) 두 함수 $f(x), g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

[2-1] 실수 t $(t>2)$에 대하여 좌표평면의 점 $\mathrm{P}(0, t)$에서 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$에 그은 두 접선의 방정식을 t에 관한 식으로 나타내시오. (15점)

[2-2] 실수 t $(t>2)$에 대하여 좌표공간의 점 $\mathrm{Q}(0, t, t+2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P라 하자. 점 P에서 xy평면 위에 있는 타원

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \ z=0$$

에 그은 두 접선이 직선

$$y=-2, \ z=0$$

과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, [2-1]의 결과를 이용하여 사면체 QPAB의 부피의 최솟값을 구하시오. (20점)

출제의도

본 문항에서는 타원과 직선이 접할 때, 제시된 입체도형의 부피의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 문제 상황을 파악하고 상황에 맞는 타원과 직선의 위치 관계를 이해하여, 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 상황에 맞도록 입체도형의 부피를 식으로 나타내어, 부피의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문제해설

타자가 야구공을 쳤을 때 공이 날아가면서 그리는 곡선, 햇빛이 비치는 바닥에 놓여 있는 공의 그림자의 경계, 태양 옆을 지나면서 다시는 태양계로 돌아오지 않는 비주기 혜성의 궤도 등 실생활에서 이차곡선의 예를 많이 찾아 볼 수 있다. 본 문항은 타원의 접선의 방정식을 나타내어 원하는 삼각형의 넓이를 구하고, 사면체의 부피의 최솟값을 음함수의 미분법과 몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 이용하여 상황에 맞도록 문제를 해결하고, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	음함수 미분법을 사용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	5
	접점이 주어졌을 때 접선의 방정식의 형태를 알고 있다.	2
	접선이 $(0, t)$를 지나감을 이용하여 접점의 y좌표를 구할 수 있다.	3
	접점이 타원 위에 있음을 이용하여 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	3
	주어진 접점의 좌표를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있다.	2
[2-2]	P의 좌표를 구할 수 있다.	2
	[2-1]의 결과를 이용하여 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	3
	삼각형 PAB의 넓이를 t에 관한 함수식으로 나타낼 수 있다.	3
	사면체 QPAB의 부피를 t에 관한 함수식으로 나타낼 수 있다.	3
	함수의 몫의 미분법을 이용하여 부피 $f(t)$를 미분하여 정리할 수 있다.	4
	$f'(t)$를 보고 $t=3$에서 $f(t)$가 최소가 됨을 알 수 있다.	3
	$f(t)$의 최솟값을 구할 수 있다.	2

예시답안

[2-1]

$\frac{2x}{9}+\left(\frac{2y}{4}\right)\frac{dy}{dx}=0$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{2x}{9}\right)\left(\frac{4}{2y}\right)=-\frac{4x}{9y}$ 이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{4x_1}{9y_1}(x-x_1) \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이다. 이 직선이 $\mathrm{P}(0,\ t)$를 지나므로

$$t-y_1=-\frac{4x_1}{9y_1}(0-x_1)$$

$$t=\frac{4{x_1}^2+9{y_1}^2}{9y_1}=\frac{36}{9y_1}=\frac{4}{y_1}$$

$$\therefore \quad y_1=\frac{4}{t}$$

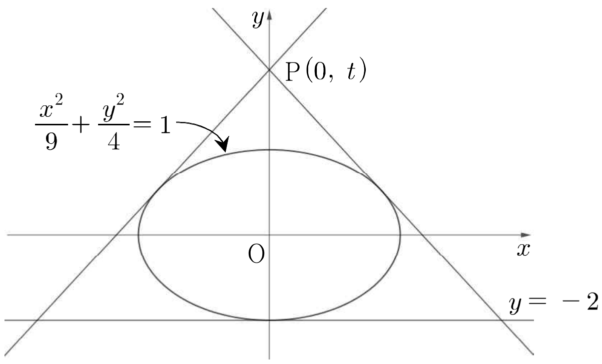
이것을 $\frac{{x_1}^2}{9}+\frac{{y_1}^2}{4}=1$에 대입하여 x_1을 구하면

$$x_1=\pm\frac{3\sqrt{t^2-4}}{t}$$

이다. 이때 구한 x_1과 y_1을 (*)에 대입하면 두 접선의 방정식은 각각

$$y=\frac{\sqrt{t^2-4}}{3}x+t\,,\ y=-\frac{\sqrt{t^2-4}}{3}x+t$$

이 된다.



[2-2]

P 의 좌표는 $(0,\ t,\ 0)$이므로 [2-1]의 결과를 이용하면 두 접선이 직선 $y=-2$, $z=0$과 만나는 두 점 A, B 는 각각

$$\mathrm{A}\left(\frac{-3(t+2)}{\sqrt{t^2-4}},\ -2,\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{3(t+2)}{\sqrt{t^2-4}},\ -2,\ 0\right)$$

이므로 삼각형 PAB 의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{6(t+2)}{\sqrt{t^2-4}}\times(t+2)=\frac{3(t+2)^2}{\sqrt{t^2-4}}$$

이다. 따라서 사면체 QPAB의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\times(\text{삼각형 PAB의 넓이})\times\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{3(t+2)^2}{\sqrt{t^2-4}}\times(t+2)=\frac{(t+2)^3}{\sqrt{t^2-4}}$$

이다. 이것을 $f(t)$라 두고 미분하면

$$f'(t)=\frac{3(t+2)^2\sqrt{t^2-4}-(t+2)^3\times\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2-4}}}{t^2-4}$$
$$=\frac{2(t+2)^2(t-3)}{(t-2)\sqrt{t^2-4}}$$

이고

t	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$25\sqrt{5}$	$\nearrow$

$t>2$ 이므로 위 증감표에 의해 $t=3$ 일 때, $f(t)$는 극소가 되면서 최솟값을 갖는다.
따라서 최솟값은 $t=3$ 일 때

$$f(3)=\frac{1}{3}\times\frac{3\cdot5^2}{\sqrt{5}}\times5=\frac{125}{\sqrt{5}}=25\sqrt{5}$$

이다.