나. 자연계

문 항 1

문제

【문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $f(x)$의 **이계도함수**라고 하며, 이것을 $f''(x)$로 나타낸다.

(나) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

이고, 이를 이용하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

가 성립한다.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$$

를 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1-1] $f(x)$와 $f''(x)$의 관계식을 구하고, $f(x)$를 구하시오. (20점)

[1-2] $\displaystyle\int_0^1 \left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2 dx$를 구하시오. (15점)

출제의도

본 문항에서는 정적분으로 정의된 함수 $f(x)$에 대해 제시된 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 찾아내어, 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 문제 상황을 파악하고 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$를 합성함수의 미분, 역함수의 미분을 활용하여 $f(x)$와 $f''(x)$의 관계식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] [1-1]에서 구한 함수 $f(x)$를 활용하여 주어진 정적분의 값을 계산할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항해설

본 문항은 정적분으로 정의된 함수 $f(x)$에 대한 조건을 적절히 변형하여 함수 $f(x)$를 찾고, $f(x)$와 $f''(x)$의 관계식, 치환적분을 이용하여 주어진 정적분의 값을 정확하게 계산할 수 있는지를 평가한다.

채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(x)$ 와 $f''(x)$의 관계식을 구할 수 있다.	5
	$f(x), f'(x), f''(x)$ 의 관계식을 통해 $\dfrac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=1$을 구할 수 있다.	5
	유리함수의 부정적분을 통해 $\ln\{f(x)+f'(x)\}=x$를 구할 수 있다.	5
	식을 정리하여 $f(x)$를 구할 수 있다.	5
[1-2]	$(e^x-e^{-x})^2=(e^x+e^{-x})^2-4$를 이용하여 $\displaystyle\int_0^1\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2dx=1-\int_0^1\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$ 를 구할 수 있다.	5
	치환적분법을 이용하여 $\displaystyle\int_0^1\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx$의 값을 구할 수 있다.	7
	$\displaystyle\int_0^1\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2dx$의 값을 구할 수 있다.	3

예시답안

[1-1]

$f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$ 이고, $\{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2+1$ 이다. $\left(\{f(x)\}^2+1>0\right)$

$f'(x)$를 미분하면

$$f''(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=\frac{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}{\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=f(x)$$

따라서 $f''(x)=f(x)$이다.

이 식의 양변에 $f'(x)$를 더하면

$$f''(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)$$

이고, $f(x)+f'(x)=f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1}>0$ 이므로 양변을 $f(x)+f'(x)$로 나누면

$$\frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=1$$

이다. 양변을 부정적분하면

$$\int \frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}dx = \int 1dx$$

따라서

$$\ln\{f(x)+f'(x)\} = x + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이다. 여기서

$$f(0) = \int_0^0 \sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt = 0, \quad f'(0) = \sqrt{\{f(0)\}^2+1} = 1$$

이므로 $\ln\{f(0)+f'(0)\} = \ln 1 = C = 0$이 성립한다. 그러므로

$$\ln\{f(x)+f'(x)\} = x$$

이다. 따라서 $f(x)+f'(x) = e^x$ 이다.

한편 $f'(x) = \sqrt{\{f(x)\}^2+1}$ 이므로 위 식에 대입하면

$$f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1} = e^x$$
$$\sqrt{\{f(x)\}^2+1} = e^x - f(x)$$

이다. 양변을 제곱하면

$$\{f(x)\}^2+1 = e^{2x} - 2e^x f(x) + \{f(x)\}^2$$
$$\therefore\ f(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

[1-2]

$f'(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 이므로 $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 이다.

$$\int_0^1 \left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{(e^x+e^{-x})^2-4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$$
$$= \int_0^1 \left\{1 - \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\right\}dx = 1 - \int_0^1 \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$$

이다. 여기서

$$\int_0^1 \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx = \int_0^1 \frac{4}{\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{4}{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx$$

이다. $t = e^{2x}+1$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx} = 2e^{2x}$,

$x=0$ 일 때 $t=2$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=e^2+1$이므로

$$\int_0^1 \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx = \int_2^{e^2+1} \frac{2}{t^2}dt = 2\left[-\frac{1}{t}\right]_2^{e^2+1} = -\frac{2}{e^2+1}+1$$

이다. 따라서

$$\therefore\ \int_0^1 \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 dx = 1 - \int_0^1 \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx = 1 - \left(-\frac{2}{e^2+1}+1\right) = \frac{2}{e^2+1}$$