문 항 3

문제

【문항 3】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

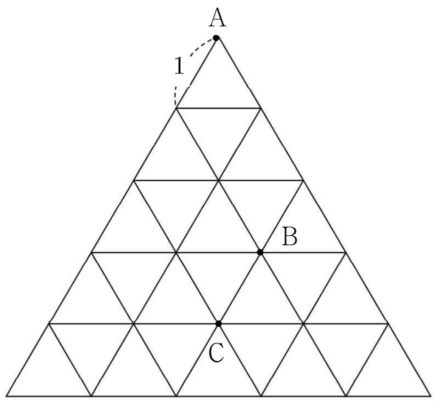
(가) n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

(나) 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0\text{)}$$

그림과 같이 인접한 두 지점 사이의 거리가 1인 정삼각형 모양의 도로망이 있다. 이 도로망을 따라서 이동하려고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



[3-1] A 지점에서 출발하여 C 지점으로 이동하려고 할 때, 이동거리가 5인 경로는 몇 가지인지 구하시오. (10점)

[3-2] 주머니 안에 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 세 장의 카드가 있다. 다음과 같은 방법으로 도로망을 따라서 1만큼 이동하는 것을 시행이라고 하자.

[단계 1] 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 뽑았을 때 1이 적힌 카드이면 ↙ 방향으로, 2가 적힌 카드이면 ↘ 방향으로, 3이 적힌 카드이면 → 방향으로 도로망을 따라서 1만큼 이동한다. 만약 3이 적힌 카드를 뽑아서 이동을 할 수 없을 때에는 남은 두 장의 카드 중에서 한 장의 카드를 다시 뽑아서 1이 적힌 카드를 뽑으면 ↙방향으로, 2가 적힌 카드를 뽑으면 ↘ 방향으로 도로망을 따라서 1만큼 이동한다.

[단계 2] 1만큼 이동을 하고 나면 모든 카드를 주머니에 다시 넣는다.

이와 같은 시행을 반복하여 <u>A 지점에서 출발하여 B 지점으로 이동하였다고 할 때</u>, A 지점에서 B 지점까지 이동한 거리를 확률변수 X라 하자. 이때, $\dfrac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=4)}$의 값을 구하시오. (20점)

(단, 시행은 최대 5번까지 할 수 있다.)

출제의도

본 문항에서는 합의 법칙과 같은 것이 있는 순열을 이용하여 주어진 상황을 만족하는 경우의 수를 구하고, 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용하여 구하려는 값을 정확하게 계산할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[3-1] 합의 법칙과 같은 것이 있는 순열을 이용하여 주어진 상황을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용하여 구하려는 확률의 비의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항해설

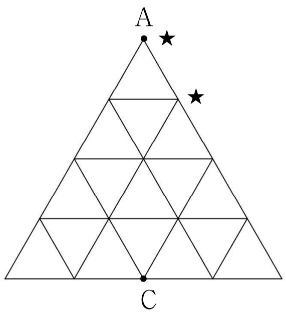
주어진 상황에서 자신이 선택할 수 있는 방법 중에서 합리적인 방법을 선택할 수 있다는 것은 매우 중요하다. 본 문항은 합의 법칙, 같은 것이 있는 순열을 이용하여 주어진 상황에 맞는 경우의 수를 구할 수 있는지, 확률의 덧셈정리, 조건부확률을 이용하여 구하려는 두 확률의 값의 비를 구할 수 있는지, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	이동거리가 5인 경로의 두 종류 (a, a, a, b, c), (a, b, b, b, d)를 서술할 수 있다.	4
	(a, a, a, b, c), (a, b, b, b, d)로 만들어지는 경로의 가짓수를 구할 수 있다.	5
	이동거리가 5인 경로를 구할 수 있다.	1
[3-2]	각 지점에서 다른 지점으로 이동할 수 있는 확률을 구별해서 구할 수 있다.	2
	$\mathrm{P}(X=3)$과 $\mathrm{P}(X=4)$의 값이 조건부확률의 정의를 이용하여 구해야 한다는 것을 서술할 수 있다.	5
	3번, 4번 이동하여 B 지점에 도착할 수 있는 확률을 구할 수 있다.	10
	$\dfrac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=4)}$의 값을 구할 수 있다.	3

예시답안

[3-1]



↙ 방향으로 1만큼 이동하는 것을 a,
↘ 방향으로 1만큼 이동하는 것을 b,
→ 방향으로 1만큼 이동하는 것을 c,
← 방향으로 1만큼 이동하는 것을 d라 하면

이동거리가 5인 경로는 다음과 같은 두 가지 경우가 있다.

(ⅰ) a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우

a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 전체 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$(가지)이다.

이 중에서 그림의 표시된 지점(★)에서는 → 방향으로는 이동할 수 없으므로

1) c를 먼저 선택하고 나머지 a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수 $\dfrac{4!}{3!}=4$(가지)

2) b, c순으로 선택하고 나머지 a, a, a를 일렬로 나열하는 경우의 수 $\dfrac{3!}{3!}=1$(가지)

의 5가지의 경우는 위 도로망에서 불가능하다.

따라서 구하는 경우의 수는 $20-5=15$(가지)이다.

(ⅱ) a, b, b, b, d를 일렬로 나열하는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 15(가지)이다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의해서 이동거리가 5인 경로는 $15+15=30$(가지)이다.

※ 참고

좌표평면 위에 A 지점을 $(0, 0)$으로 두고, 각 방향으로 1만큼 이동하는 것을

↙ 방향 : $\vec{a}=(1, 0)$,   ↘ 방향 : $\vec{b}=(0, 1)$

→ 방향 : $\vec{c}=(-1, 1)$,   ← 방향 : $\vec{d}=(1, -1)$

이라 하자. C 지점은 $(2, 2)$이므로 위 네 방향으로 이동하는 횟수를 각각 x, y, z, w라 두면

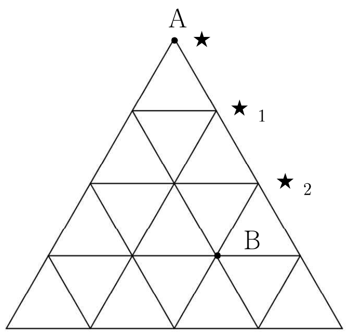
$$\begin{cases} x+y+z+w=5 \\ x-z+w=2 \\ y+z-w=2 \end{cases}$$

이 성립하고, 연립방정식을 풀면

$x=3, y=1, z=1, w=0$ 혹은 $x=1, y=3, z=0, w=1$

의 두 가지의 경우만 존재한다.

[3-2]



그림의 표시된 세 지점(★)에서는 →방향으로는 이동할 수 없다.

즉, 뽑은 카드가 3 이면 남은 두 장의 카드 중에서 한 장의 카드를 다시 뽑아야 하므로

★ 지점에서 각 방향으로 이동할 수 있는 확률은

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

★ 지점 이외에서는 B 지점까지 이동할 때 지나는 모든 점에서 각 방향으로 이동할 수 있는 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

위 시행을 반복하였을 때

A 지점을 출발하여 B 지점에 도착하는 사건을 L 이라 하고,

이동한 거리가 3 인 사건을 D_3, 이동한 거리가 4 인 사건을 D_4 라 하자.

$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(D_3|L)=\dfrac{\mathrm{P}(D_3\cap L)}{\mathrm{P}(L)}$ 이고

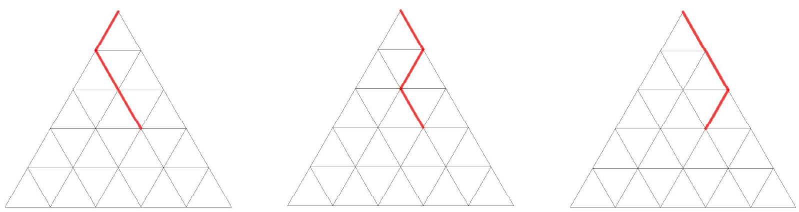
$\mathrm{P}(D_3\cap L)$은 다음의 네 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

(ⅰ) ★$_1$, ★$_2$ 두 지점을 모두 지나지 않는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(ⅱ) ★$_1$지점은 지나고, ★$_2$지점을 지나지 않는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

(ⅲ) ★$_1$지점은 지나지 않고, ★$_2$지점을 지나는 경우 : 0

(ⅳ) ★$_1$, ★$_2$ 두 지점을 모두 지나는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

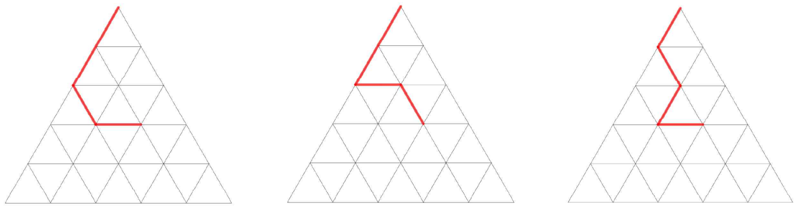


따라서 $\mathrm{P}(D_3\cap L)=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{19}{72}$ 이다.

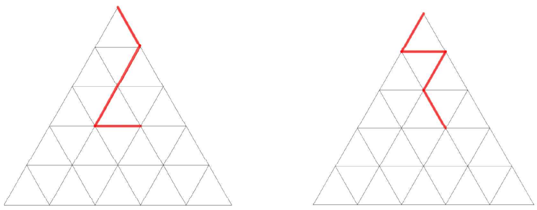
$\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(D_4|L)=\dfrac{\mathrm{P}(D_4\cap L)}{\mathrm{P}(L)}$ 이고

$\mathrm{P}(D_4\cap L)$은 다음의 네 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

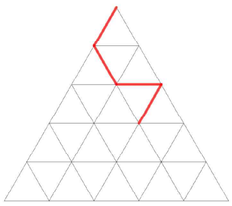
(i) ★$_1$, ★$_2$ 두 지점을 모두 지나지 않는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 3=\frac{1}{18}$



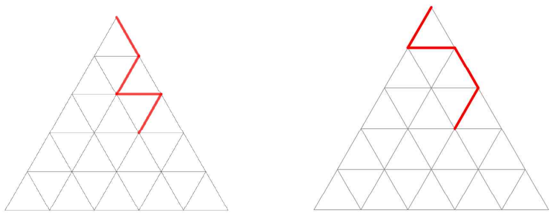
(ii) ★$_1$지점은 지나고, ★$_2$지점을 지나지 않는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{18}$



(iii) ★$_1$지점은 지나지 않고, ★$_2$지점을 지나는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{36}$



(iv) ★$_1$, ★$_2$ 두 지점을 모두 지나는 경우 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{12}$



따라서 $\mathrm{P}(D_4\cap L)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{12}=\frac{2}{9}$ 이다.

그러므로 $\dfrac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=4)}=\dfrac{\mathrm{P}(D_3\cap L)}{\mathrm{P}(D_4\cap L)}=\dfrac{\frac{19}{72}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{19}{16}$

【별해】

위 시행을 반복하였을 때

A 지점을 출발하여 B 지점에 도착하는 사건을 L이라 하고,

이동한 거리가 3인 사건을 D_3, 이동한 거리가 4인 사건을 D_4,

이동한 거리가 5인 사건을 D_5라 하자.

(i) $\mathrm{P}(D_3 \cap L) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{19}{72}$

(ii) $\mathrm{P}(D_4 \cap L) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{2}{9}$

(iii) $\mathrm{P}(D_5 \cap L)$은 다음의 네 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

1) $\bigstar_1$, $\bigstar_2$ 두 지점을 모두 지나지 않는 경우 : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{81}$

2) $\bigstar_1$지점은 지나고, $\bigstar_2$지점을 지나지 않는 경우 : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{108}$

3) $\bigstar_1$지점은 지나지 않고, $\bigstar_2$지점을 지나는 경우 : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{108}$

4) $\bigstar_1$, $\bigstar_2$ 두 지점을 모두 지나는 경우 : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{72}$

따라서 $\mathrm{P}(D_5 \cap L) = \frac{1}{81} + \frac{1}{108} + \frac{1}{108} + \frac{1}{72} = \frac{29}{648}$

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해서

$$\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(D_3 \cap L) + P(D_4 \cap L) + P(D_5 \cap L) = \frac{19}{72} + \frac{2}{9} + \frac{29}{648} = \frac{43}{81}$$

$$\mathrm{P}(X=3) = \mathrm{P}(D_3 | L) = \frac{\mathrm{P}(D_3 \cap L)}{\mathrm{P}(L)} = \frac{\frac{19}{72}}{\frac{43}{81}} = \frac{171}{344}$$

$$\mathrm{P}(X=4) = \mathrm{P}(D_4 | L) = \frac{\mathrm{P}(D_4 \cap L)}{\mathrm{P}(L)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{43}{81}} = \frac{18}{43}$$

이므로 $\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=4)} = \frac{\frac{171}{344}}{\frac{18}{43}} = \frac{19}{16}$