문 항 2

문제

【문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

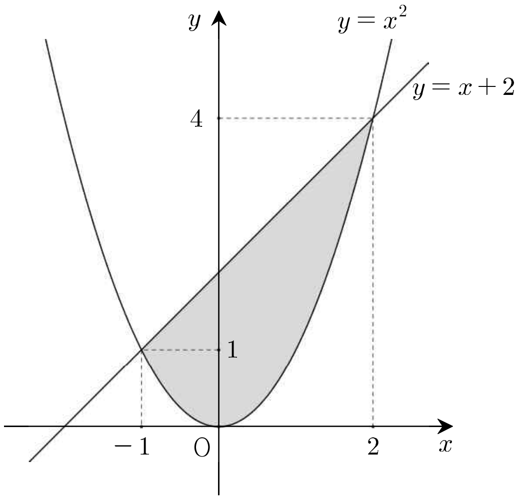
(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\,f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

(나) 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

자연수 a, b에 대하여 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+b$로 둘러싸인 영역을 $D(a,b)$라 하자. (단, 경계선은 포함한다.) 영역 $D(a,b)$의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $L(a,b)$라 하자. 예를 들면 $D(1,2)$는 아래와 같은 영역이며



영역 $D(1,2)$의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $(-1,1)$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$이므로 $L(1,2)=8$이다.

[2-1] 자연수 n과 실수 α, β에 대하여 제시문을 이용하여 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^n\,dx$를 구하시오. (10점)

[2-2] 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근의 차를 c라 하자. 예를 들면 $x^2-x-2=0$의 두 근이 -1, 2이므로 $c=2-(-1)=3$이다. 영역 $D(a,b)$의 넓이가 유리수일 때, $L(a,b)$를 c에 관한 식으로 나타내시오. (25점)

출제의도

본 문항에서는 이차방정식의 근의 차가 정수일 조건을 구하고 자연수의 거듭제곱의 합의 계산을 활용하여 이차함수로 주어진 영역의 정수 좌표점을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 거듭제곱 형태 다항함수의 정적분을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 이차방정식의 근의 차가 정수일 조건을 구하고, 이를 활용하여 이차함수로 주어진 영역의 정수 좌표점을 거듭제곱의 합의 계산을 활용하여 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

문항해설

치환적분법과 부분적분법을 이용하여 다항함수의 적분을 변형하여 계산할 수 있는지를 평가한다. 이차방정식의 두 근을 이용하여 이차함수와 직선 사이의 넓이를 구할 수 있는지를 확인한다. 여기서 구한 값을 문제 상황에 적용할 수 있는지, 그리고 정수가 되기 위한 조건을 파악하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. $x=\alpha+k$(단, k는 정수)일 때, 영역 $D(a,\,b)$에 포함된 $L(a,\,b)$의 값을 논리적으로 구하고, 자연수의 거듭제곱의 성질을 이용하여 문제에서 요구하는 내용을 표시할 수 있는지를 평가한다.

채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	다항함수의 치환적분법과 부분적분법을 할 수 있다.	5
	정적분을 이해하고 그 값을 구할 수 있다.	5
[2-2]	이차방정식의 근을 구할 수 있다.	3
	[2-1]을 이용하여 이차함수의 정적분을 구할 수 있다.	2
	다항함수와 무리함수의 곱으로 이루어진 함수 $\frac{1}{6}(a^2+4b)\sqrt{a^2+4b}$ 에서 이 값이 유리수일 조건은 $\sqrt{a^2+4b}$ 가 유리수가 됨을 이해할 수 있다.	5
	자연수 a, c에 대하여 유리수 $\frac{1}{2}(a\pm c)$ 가 정수가 되기 위한 조건을 이해할 수 있다.	5
	양 끝점 $(\alpha+t, (\alpha+t)^2), (\alpha+t, a(\alpha+t)+b)$ 가 정수인 선분에서 정수 점의 개수를 구할 수 있다.	5
	자연수 거듭제곱의 합을 구할 수 있다.	5

예시답안

[2-1]

제시문 (가), (나)에 따라

$f(x)=x-\alpha$, $g'(x)=(x-\beta)^n$, $a=\alpha$, $b=\beta$라 하고 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^n\,dx &= \left[(x-\alpha)\left\{\frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}\right\}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}(x-\beta)^{n+2}\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\alpha-\beta)^{n+2}\end{aligned}$$

이다.

【별해】

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^n\,dx &= \int_\alpha^\beta \{(x-\beta)+(\beta-\alpha)\}(x-\beta)^n\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\beta)^{n+1}+(\beta-\alpha)(x-\beta)^n\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n+2}(x-\beta)^{n+2}-(\alpha-\beta)(x-\beta)^{n+1}\right]_\alpha^\beta \\ &= -\frac{1}{n+2}(\alpha-\beta)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(\alpha-\beta)^{n+2} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\alpha-\beta)^{n+2}\end{aligned}$$

[2-2]

먼저 근의 공식을 이용하여 $x^2-ax-b=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+4b}\right),\quad \beta=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)$$

이다. 한편 영역 $D(a,b)$의 넓이는 [2-1]의 결과에 의해

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax+b-x^2)\,dx &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3 \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(a^2+4b)\sqrt{a^2+4b}\end{aligned}$$

이다. 따라서 영역 $D(a,b)$의 넓이가 유리수일 조건은 $\sqrt{a^2+4b}$가 유리수이어야 한다.
c를 구하면 $c=\beta-\alpha=\sqrt{a^2+4b}$이며 a, b가 자연수이므로 c는 자연수이다.

이제 $\alpha\le x\le\beta$에 대하여 $L(a,b)$를 구하여 보자.
만일 a가 짝수이면 a^2+4b가 4의 배수가 되어서 c는 짝수가 되고, a가 홀수이면 a^2+4b가 홀수가 되어서 c가 홀수가 된다. (홀수) ± (홀수)=(짝수), (짝수) ± (짝수)=(짝수)이다.
따라서

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+4b}\right)=\frac{1}{2}(a-c),\quad \beta=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)=\frac{1}{2}(a+c)$$

이므로 α, β는 모두 정수이다.

$k=0, 1, \cdots, \beta-\alpha=c$라 하자. $x=\alpha+k$에 대하여 영역 $D(a,b)$의 x좌표와 y 좌표가 정수인 점의 집합과 집합의 개수 $L(a,b)$를 구하여 보면

$k=0$: $\{(\alpha, \alpha^2)\}$ 이므로 1개

$k=1$: $\{(\alpha+1, d) \mid (\alpha+1)^2 \le d \le a(\alpha+1)+b\}$ 이고

$$\begin{aligned}\{a(\alpha+1)+b\}-(\alpha+1)^2+1 &= \{(\alpha+\beta)(\alpha+1)-\alpha\beta\}-(\alpha+1)^2+1 \\ &= \beta-\alpha=c\end{aligned}$$

이므로 c개

$\vdots$

$k=t$: $\{(\alpha+t, d) \mid (\alpha+t)^2 \le d \le a(\alpha+t)+b\}$ 이고

$$\begin{aligned}\{a(\alpha+t)+b\}-(\alpha+t)^2+1 &= \{(\alpha+\beta)(\alpha+t)-\alpha\beta\}-(\alpha+t)^2+1 \\ &= -t^2+t(\beta-\alpha)+1 \\ &= -t^2+ct+1\end{aligned}$$

이므로 $(-t^2+ct+1)$개

$\vdots$

$k=c$: $\{(\beta, \beta^2)\}$ 이므로 1개

이다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{c}(-t^2+ct+1) &= -\frac{1}{6}c(c+1)(2c+1)+c\frac{c(c+1)}{2}+(1+c) \\ &= \frac{1}{6}(1+c)(-2c^2-c+3c^2+6) \\ &= \frac{1}{6}(1+c)(c^2-c+6)\end{aligned}$$

이다.