다. 의학계

문 항 1

문제

【문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$라고 할 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(나) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$에 평행한 직선의 방정식은

(i) $abc \neq 0$인 경우 $\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c}$

(ii) $ab \neq 0$, $c=0$인 경우 $\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b}$, $z = z_1$

(다) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

(라) 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

를 이용하면

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

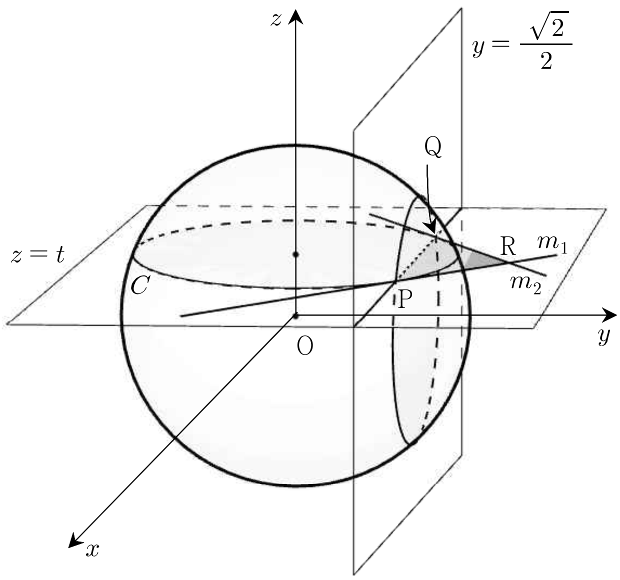
(마) 구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

[1-1] $b^2+c^2<1$을 만족하는 두 양의 실수 b, c에 대하여, 좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+z^2=1$이 두 평면 $\beta : y=b$, $\gamma : z=c$와 만나서 생기는 두 원을 각각 C_1, C_2라 하자. 이 두 원이 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라 하자. 평면 β에서 원 C_1의 점 P에서의 접선을 l_1, 평면 γ에서 원 C_2의 점 P에서의 접선을 l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각을 θ라 하자. 이때, $\cos\theta$의 값을 b, c에 관한 식으로 나타내고, $b^2+c^2=\dfrac{1}{4}$을 만족할 때, $\cos\theta$의 최댓값을 구하시오. (15점)

[1-2] 그림과 같이 구 S : $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 $z=t\left(-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}\right)$가 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C가 평면 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나는 두 점을 P, Q 라 하자. 평면 $z=t$에서 원 C 위의 두 점 P, Q 에서의 접선을 각각 m_1, m_2라 하면, 두 직선 m_1, m_2는 한 점 R 에서 만난다.

이때, t가 $-\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}$까지 변할 때, 삼각형 PQR 가 만드는 입체도형의 부피를 구하시오. (20점)



출제의도

본 문항은 좌표공간에서 구와 평면에 의하여 생기는 원을 구할 수 있는지와 원에서의 접선을 이해할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 문제의 상황을 파악하고 구와 평면에 의해 생기는 원을 구할 수 있는지와 두 원에서의 접선의 관계를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 주어진 구와 평면에 의하여 생기는 원의 접선이 만드는 도형이 변하면서 나타나는 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항해설

우리가 살고 있는 집이나 유명한 건축물 또는 우리 주변에서 볼 수 있는 사물들은 공간도형으로 이루어져 있다. 따라서 사물에 대한 이해는 공간도형의 기본성질을 이해하는 것으로부터 출발한다고 볼 수 있다. 본 문항은 좌표공간에서 구와 평면에 의해 생기는 원과 그 원에서의 접선을 이용하여 상황에 맞도록 문제를 해결하고 풀이를 논리적으로 전개할 수 있는지 평가한다.

채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	점 P에서의 접하는 평면을 구할 수 있다.	4
	직선 l_1, l_2의 방정식을 구할 수 있다.	4
	$\cos\theta$을 b, c에 관한 식으로 나타낼 수 있다.	2
	$\cos\theta$의 최댓값을 구할 수 있다.	5
[1-2]	점 R의 좌표를 구할 수 있다.	4
	삼각형 PQR의 넓이 $S(t)$를 구할 수 있다.	4
	치환적분법을 이용하여 부피 $V=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\, d\theta$을 구할 수 있다.	6
	부피 $\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi$를 구할 수 있다.	6

예시답안

[1-1]

두 원 C_1, C_2의 교점 P를 (a, b, c)라 하면 $a^2+b^2+c^2=1$이다. 점 P를 지나며 구 S와 접하는 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$이므로 이 평면의 방정식은 $ax+by+cz=1$이다. 이 평면을 α라 하자.

직선 l_1은 평면 β 위에 있고, 또한 점 P에서 구 S에 접하는 직선이므로 평면 α 위에도 있다. 따라서 직선 l_1은 두 평면 α와 β의 교선이다.

직선 l_1은 두 평면 $\alpha : ax+by+cz=1$, $\beta : y=b$의 교선이므로 직선 l_1의 방정식은

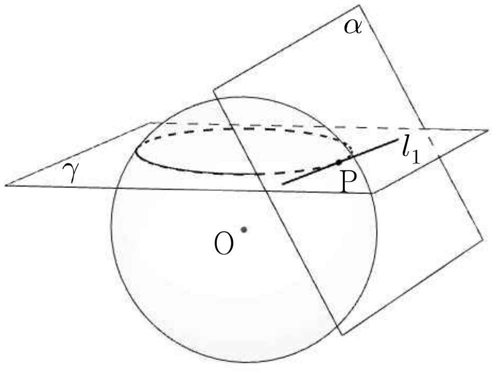
$$ax+cz=1-b^2,\ y=b$$

이고 방향벡터는 $\overrightarrow{u_1}=(c, 0, -a)$ 이다.

같은 방법으로 직선 l_2는 두 평면 α와 γ의 교선이고 직선 l_2의 방정식은

$$ax+by=1-c^2,\ z=c$$

이고 방향벡터는 $\overrightarrow{u_2}=(b, -a, 0)$이다. ([그림 1])



[그림 1]

따라서

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+a^2}\sqrt{c^2+a^2}} = \frac{bc}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}$$

한편, $2bc \le b^2+c^2 = \frac{1}{4}$ 이므로 $bc \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$이다.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{bc}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}} = \frac{bc}{\sqrt{1-(b^2+c^2)+b^2c^2}} \\ &= \frac{bc}{\sqrt{\frac{3}{4}+b^2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4b^2c^2}+1}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\frac{3\times 8^2}{4}+1}} = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

그러므로 $b=c=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{1}{7}$이다.

[1-2]

$x^2+y^2=1-t^2$, $z=t$ 위에 점 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ t\right)$와 $\mathrm{Q}\left(-a,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ t\right)$에서의 두 접선이 만나는 점을 R 이라고 할 때, 직선 PR 의 방정식은

$$\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\,a(x-a),$$

$$y = -\sqrt{2}\,ax + \sqrt{2}\left(a^2+\frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서 점 R은 $\left(0,\ \sqrt{2}\left(a^2+\frac{1}{2}\right),\ t\right)$이다.

$a^2+t^2=\frac{1}{2}$ 이기 때문에 입체의 단면인 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$ 라 하면 $S(t)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-t^2\right)^{\frac{3}{2}}$ 이다.

제시문 (마)에 의해 구하고자 하는 부피 V는

$$V=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt$$

이제 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$라고 치환하면, $dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\,d\theta$ 이고

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=\frac{1}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$V=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\,d\theta$$

제시문 (라)를 이용하면

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos2\theta+1}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 2\theta+2\cos2\theta+1\right) d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos4\theta+1}{2}+2\cos2\theta+1\right) d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{1}{8}\sin4\theta+\sin2\theta+\frac{3}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi
\end{aligned}
$$

그러므로 주어진 입체의 부피는 $\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi$ 이다.