2018학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	□	☑	□

【 문항 총괄 】

문항번호		출제범위(고교 과목명)	핵심개념 및 용어	배점 (총 100점)
1	1-1	기하와 벡터	벡터의 내적, 평면의 방정식	15
	1-2	기하와벡터		15
2	2-1	미분과 적분 II	미분과 적분의 관계. 적분을 이용하여 도형의 부피구하기	15
	2-2	미분과 적분 II		10
	2-3	미분과 적분 II		10
3	3-1	확률과 통계	경우의 수, 조건부 확률	20
	3-2	확률과 통계		15

□ 문항 1번

문항 1 - 출제의도 및 문제해설

본 문항에서는 공간벡터의 내적의 성질을 활용하여 조건을 만족하는 점들이 나타내는 도형의 넓이와 그 도형을 포함하는 평면의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-1. 평면벡터의 내적의 뜻과 구하는 방법을 확장하여 공간벡터의 내적의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 조건을 만족하는 점들이 나타내는 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
1-2. 공간벡터의 내적의 성질을 활용하여 1-1에서 구한 점들을 포함하는 평면의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항 1 - 출제 근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황선욱 외	신사고	2016	153-174

문항 1 – 채점기준

문항	채점 기준	배점
1-1	$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert\lvert\overrightarrow{\mathrm{OR}}\rvert$ 임을 설명할 수 있다.	5점
	점 P가 나타내는 도형을 설명할 수 있다.	5점
	도형의 넓이를 구할 수 있다.	5점
1-2	구하는 평면에 대하여 설명할 수 있다.	5점
	한 점과 법선벡터를 구할 수 있다.	5점
	평면의 방정식을 만들 수 있다.	3점
	평면의 방정식 $2x + 2\sqrt{3}\,y + 3z = 20$을 구할 수 있다.	2점

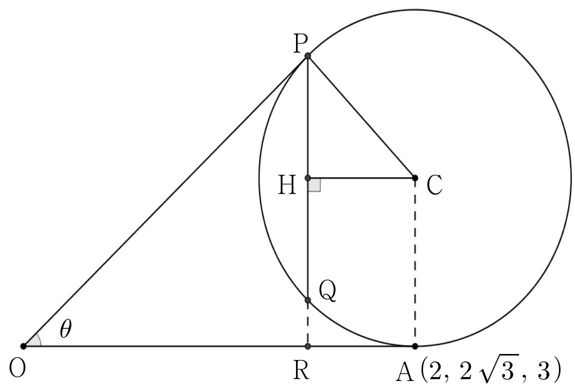
문항 1 – 예시답안

[1-1]

$\lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert = 5$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 20$ 이므로

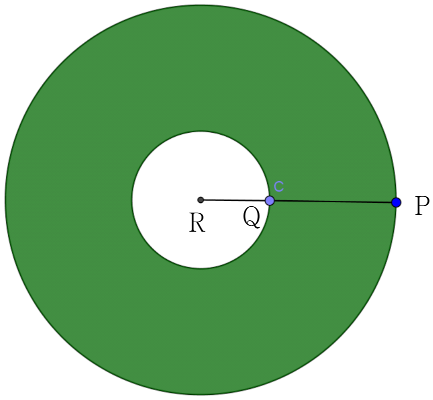
제시문 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert\cos\theta$

$= \lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert\lvert\overrightarrow{\mathrm{OR}}\rvert$



그림에서 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert\lvert\overrightarrow{\mathrm{OR}}\rvert = 20$ 따라서 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OR}}\rvert = 4$이다.

그러므로 점 P가 그리는 자취는 점 R을 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{PR}}$인 원의 내부와 반지름이 $\overline{\mathrm{QR}}$인 원의 외부의 공통부분이다.



$\therefore\ \overline{QR} = 2-\sqrt{3}\,,\quad \overline{PR} = 2+\sqrt{3}$

따라서, $S = \pi\{(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2\} = 8\sqrt{3}\pi$

[1-2]

구하는 평면의 방정식은 점 R 을 지나고 $\overrightarrow{OA}$를 법선벡터로 하는 평면의 방정식이다.

$\overline{OR} = 4$ 이므로 점 R 의 좌표는 $R\left(\frac{8}{5},\ \frac{8}{5}\sqrt{3}\,,\ \frac{12}{5}\right)$이다.

$\overrightarrow{OA} = (2,\ 2\sqrt{3}\,,\ 3)$ 이므로 제시문 (나)에 의하여 구하는 평면의 방정식은

$2(x-\frac{8}{5}) + 2\sqrt{3}(y-\frac{8}{5}\sqrt{3}) + 3(z-\frac{12}{5}) = 0$

$\therefore\ 2x + 2\sqrt{3}\,y + 3z = 20$

□ 문항 2번

문항 2 - 출제의도 및 문제해설

본 문항에서는 주어진 조건을 이용하여 함수를 구하고 구한 함수에 의해서 만들어지는 도형의 부피를 적분을 이용하여 구하는 문항이다.

2-1. 주어진 조건을 만족하는 함수가 $f(x) = \dfrac{f(x^{2^{-n}})}{x^{1-2^{-n}}}$가 성립함을 수학적 귀납법으로 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다.

2-2. 2-1에서 보인 조건들과 새로이 주어진 조건들을 가지고 미분과 적분의 관계를 잘 이해하는 지를 평가하는 문항이다.

2-3. 구한 함수를 가지고 만든 도형의 부피를 적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항 2 - 출제 근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교	수학 II	정상권 외	㈜금성출판사	2017	158-161

교과서	미적분 Ⅰ	황선욱 외	㈜좋은책신사고	2016	69-79 159-162
	미적분 Ⅱ	황선욱 외	㈜좋은책신사고	2016	150-151 160-165

문항 2 - 채점기준

문항	채점 기준	배점
2-1	$n=1$일 때 성립함을 보일 수 있다.	5점
	$n=k$일 때를 정확하게 가정할 수 있다.	3점
	$n=k+1$일 때를 $n=k$일 때 가정을 이용하여 보일 수 있다.	5점
	모든 자연수 n에 대하여 성립함을 이야기할 수 있다	2점
2-2	주어진 조건을 미분을 이용하여 $g(x^4)=\dfrac{g(x^2)}{x^2}$ 인 관계식을 구할 수 있다.	4점
	2-1의 결과를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 $g(x)=\dfrac{g(x^{2^{-n}})}{x^{1-2^{-n}}}$임을 표현할 수 있다.	3점
	연속의 정의를 이용하여 $g(x)$를 구할 수 있다	3점
2-3	도형의 단면의 넓이를 정확하게 구할 수 있다.	3점
	부피를 적분에 관한 식으로 정확하게 표현할 수 있다.	4점
	적분값을 정확하게 구할 수 있다	3점

문항 2 - 예시답안

[2-1]

(i) $f(x^2)=\dfrac{f(x)}{x}$의 x에 $x^{\frac{1}{2}}$을 대입하면

$$f(x)=\frac{f(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots ①$$

$$\therefore f(x)=\frac{f(x^{2^{-1}})}{x^{1-2^{-1}}}$$ 이므로 $n=1$일 때는 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $f(x)=\dfrac{f(x^{2^{-n}})}{x^{1-2^{-n}}}$가 성립한다고 하자.

x에 $x^{\frac{1}{2}}$을 대입하면 $f(x^{2^{-1}})=\dfrac{f((x^{2^{-1}})^{2^{-k}})}{(x^{2^{-1}})^{1-2^{-k}}}$

$\therefore f(x^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{f(x^{2^{-(k+1)}})}{x^{2^{-1}-2^{-(k+1)}}}$

①에서 $f(x^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{1}{2}} f(x)$이므로 $x^{\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{f(x^{2^{-(k+1)}})}{x^{\frac{1}{2}-2^{-(k+1)}}}$

$\therefore f(x) = \dfrac{f(x^{2^{-(k+1)}})}{x^{\frac{1}{2}-2^{-(k+1)}+\frac{1}{2}}} = \dfrac{f(x^{2^{-(k+1)}})}{x^{1-2^{-(k+1)}}}$

즉, $n = k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $f(x) = \dfrac{f(x^{2^{-n}})}{x^{1-2^{-n}}}$ 이다.

[2-2]

$\int_1^{x^2} g(t)dt = \int_{x^2}^{x^4} g(t)dt$ 에서 제시문 [다]에 의해

$\dfrac{d}{dx}\int_1^{x^2} g(t)dt = \dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} g(t)dt$ 이고

$2xg(x^2) = 4x^3 g(x^4) - 2xg(x^2)$이다.

$\therefore g(x^4) = \dfrac{g(x^2)}{x^2} \quad \cdots$ ①

①의 x에 $x^{\frac{1}{2}}$을 대입하면 논제 2-1의 조건을 만족하고 논제 2-1의 결과에 의해

모든 자연수 n에 대하여 $g(x) = \dfrac{g(x^{2^{-n}})}{x^{1-2^{-n}}}$ 이 성립한다.

또한, $g(x)$는 정의역 $(0, \infty)$ 에서 연속인 함수이므로 제시문 (나)와 $g(1) = 1$에 의해

$\therefore g(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{g(x^{2^{-n}})}{x^{1-2^{-n}}} = \dfrac{g(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$이다.

[2-3]

x축 위의 $x = \dfrac{1}{t}(1 \le t \le e)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 높이가 $\ln t$이고 밑변의 길이는 t인 직각 삼각형이다. 따라서 단면의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times t \times \ln t$이다.

그리고 $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$이므로 구하는 부피를 V 라 하면 제시문 (라), (마)에 의해

$V = \dfrac{1}{2}\int_e^1 t\ln t\left(-\dfrac{1}{t^2}dt\right) = \dfrac{1}{2}\int_1^e \dfrac{\ln t}{t}dt$ 이다. $\ln t = u$라 하면 $\dfrac{1}{t}dt = du$이므로

$V = \dfrac{1}{2}\int_1^e \dfrac{\ln t}{t}dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 u\,du = \dfrac{1}{4}$ 이다.

□ 문항 3번

문항 3 - 출제의도 및 문제해설

본 문항에서는 곱의 법칙과 원순열의 개념을 활용하여 주어진 사건의 경우의 수를 구하고, 조건부확률의 정의를 이해하여 주어진 사건이 일어날 확률을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

3-1. 곱의 법칙과 원순열의 개념을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

3-2. 조건부확률의 정의를 이해하여 사건이 일어나는 확률을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항 3 - 출제 근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2017	4-76
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2017	12-131
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2017	10-117

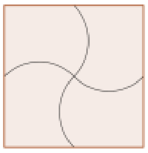
문항 3 - 채점기준

문항	채점 기준	배점
3-1	i)모양의 타일에 색칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	ii)모양의 타일에 색칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	iii)모양의 타일에 색칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	iv)모양의 타일에 색칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	v)모양의 타일에 색칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	vi)모양의 타일에 색칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	서로 다른 타일의 종류를 구할 수 있다.	2점
3-2	$\frac{1}{4}$ 보다 큰 넓이를 차지하는 색이 존재하는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
	ii), iv), v)모양의 타일에서 빨간색, 노란색 영역의 넓이가 서로 같은 경우의 수를 구할 수 있다.	5점
	iii)모양의 타일에서 빨간색, 노란색 영역의 넓이가 서로 같은 경우의 수를 구할 수 있다.	5점
	제시된 확률을 구할 수 있다.	2점

문항 3 - 예시답안

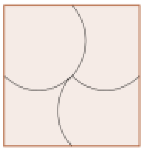
[3-1]

i)



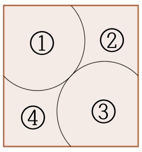
의 경우는 네 영역이 모두 같은 역할을 한다. 따라서 제시문 (나)에 의해서 서로 다른 타일의 종류는 빨간색, 노란색, 파란색, 초록색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다. 즉, $(4-1)!=3!=6$(가지)

ii)



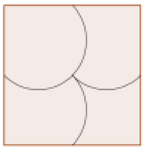
의 경우는 네 영역이 모두 다른 역할을 한다. 따라서 서로 다른 타일의 종류는
빨간색, 노란색, 파란색, 초록색을 순서 있게 나열하는 경우의 수와 같다. 즉 $4\times3\times2\times1=24$(가지)

iii)



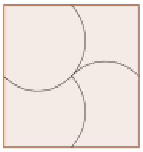
의 경우는 ①과 ③이, ②와 ④가 서로 같은 역할을 한다. 따라서 ①과 ②의 어느 하나의 타일에
빨간색을 칠한다고 생각하면 서로 다른 타일의 종류는 노란색, 파란색, 초록색을 순서 있게 나열하는 경우의 수와 같다. 즉, $2\times(3\times2\times1)=12$(가지)

iv)



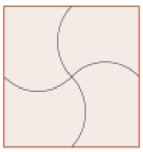
의 경우는 ii)의 경우와 같이 $4\times3\times2\times1=24$(가지)

v)



의 경우는 ii)의 경우와 같이 $4\times3\times2\times1=24$(가지)

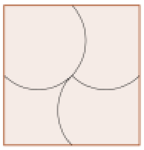
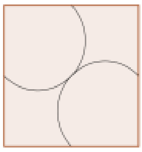
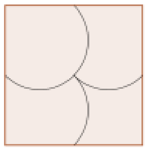
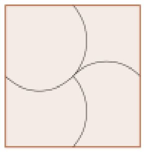
vi)



의 경우는 i)의 경우와 같이 $3\times2\times1=6$(가지)
그러므로 구하는 타일의 종류는 $6+24+24+12+24+6=96$, 96가지이다.

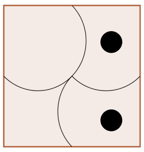
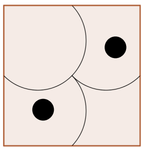
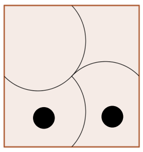
[3-2]

논제3-1)의 풀이에서 $\frac{1}{4}$ 보다 큰 넓이를 차지하는 색이 존재하는 경우는

ⅱ)  24 가지, ⅲ)  12 가지, ⅳ)  24 가지, ⅴ)  24 가지

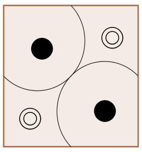
총 84 가지이다.

이 중 빨간색, 노란색 영역의 넓이가 서로 같은 경우의 수는 다음과 같다.

ⅱ) , ⅳ) , ⅴ)  의 경우는

●의 자리에 빨간색, 노란색이 칠해지고 ●이 아닌 자리에 파란색, 초록색이 칠해지면 된다.

따라서 $3 \times (2 \times 2) = 12$ (가지)

ⅲ)  의 경우는

●의 자리에 빨간색, 노란색이 칠해지거나, ◎의 자리에 빨간색, 노란색이 칠해지면 된다.

따라서 $2 \times 2 = 4$ (가지)

그러므로 구하는 확률은 제시문 (다)에 의해서 $\dfrac{\dfrac{12+4}{96}}{\dfrac{84}{96}} = \dfrac{16}{84} = \dfrac{4}{21}$ 이다.