2018학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	☐	☐	☑

【 문항 총괄 】

문항번호		출제범위(고교 과목명)	핵심개념 및 용어	배점 (총 100점)
1	1-1	기하와 벡터	평면과 구와의 위치관계, 접평면	10
	1-2	기하와벡터		20
2	2-1	미적분 II	함수의 극대와 극소, 정적분의 계산	5
	2-2	미적분 II		15
	2-3	미적분 II		15
3	3-1	확률과 통계	확률, 경우의 수	15
	3-2	확률과 통계		20

□ 문항 1번

문항 1 - 출제의도 및 문제해설

본 문항에서는 구 위의 한 점에서 접하는 접평면의 방정식을 구하는 방법을 서술할 수 있고, 구와 평면과의 위치관계에 대한 기하적인 특성을 이해하고, 이면각의 의미를 통한 평면의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다.

1-1. 구위의 한 점에서 접하는 접평면의 방정식을 구하는 과정을 명확하게 기술할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
1-2. 구와 평면과의 위치관계와 교선의 길이를 통해 기하적인 특성을 이해하고, 이면각의 크기 조건을 통해 평면의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항 1 - 출제근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	㈜비상교육	2017	120-121 139-141 149-151 157-163

문항 1 - 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	평면과 구가 점 $P(x_0, y_0, z_0)$에서 접하는 성질로부터 평면의 수직인 벡터를 구할 수 있다.	5점
	점과 평면에 수직인 벡터를 이용하여 평면의 방정식을 구할 수 있다.	5점
1-2	문제조건을 통해 평면이 반지름의 길이가 1인 구와 접하는 문제임을 알 수 있다.	10점
	이면각의 크기를 통해 조건에 맞는 평면의 수직인 벡터를 구할 수 있다.	5점
	조건을 통해 평면의 방정식을 구할 수 있다.	5점

문항 1 - 예시답안

[1-1]

(다)에 의해 길이가 1인 단위벡터 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$에 수직이고 구 위의 점 $P(x_0, y_0, z_0)$를 지나는 평면의 방정식은 $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$ 이다.

평면 위의 점 (x, y, z)의 위치벡터를 $\vec{X}$, 점 $P(x_0, y_0, z_0)$의 위치벡터를 $\vec{P}$라 하면 평면의 방정식은 $\vec{n} \cdot (\vec{X}-\vec{P})=0$로 쓸 수 있다.

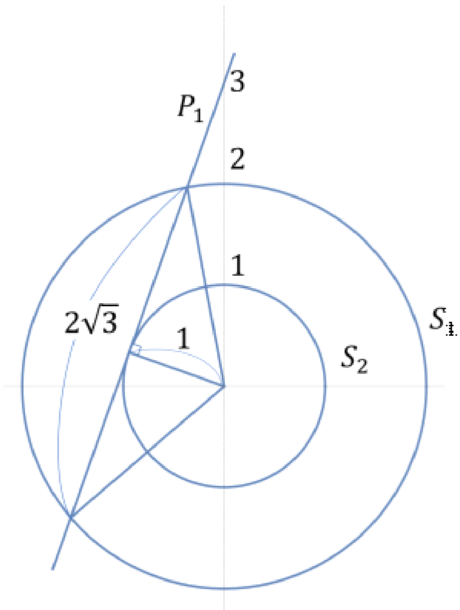
평면과 구가 점 $P(x_0, y_0, z_0)$에서 접하므로, 원점 O에서 평면 $\vec{n} \cdot (\vec{X}-\vec{P})=0$까지 거리는 1임과 $|\vec{n}|=1$임을 알고, (라)를 적용하면 $|\vec{n} \cdot (-\vec{P})|=1$ 이고, (가)에 의해 $|\vec{n}||\vec{P}|\cos\theta=\pm 1$ 이고 $|\vec{n}|=1$, $|\vec{P}|=1$이므로 $\cos\theta=\pm 1$를 얻을 수 있다.

그러므로 $\vec{n}=\pm\vec{P}$이고 구하고자 하는 평면의 방정식은 $\vec{P} \cdot (\vec{X}-\vec{P})=0$ 또는 $x_0x+y_0y+z_0z-1=0$ 이다.

[1-2]

평행이동에 의해 문제에서 주어진 구와 평면을 반지름이 2이고 중심이 원점인 구 S_1 와 $(0,0,3)$을 지나고 S_1과의 교선의 길이가 $2\sqrt{3}\pi$인 평면 P_1으로 가정할 수 있다.

평면 P_1은 원점으로부터 거리가 1인 평면이므로 원점이 중심이고 반지름이 1인 구 S_2와 접하는 것을 알 수 있다.



구 S_2 위의 점(x, y, z)에서 접평면에 수직인 벡터는 (x, y, z)이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (x, y, z-3) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면 $z = \dfrac{1}{3}$을 얻고 접평면에 수직인 벡터는 매개변수 t를 이용하여 $(x, y, z) = (\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos t, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin t, \dfrac{1}{3})$ 로 쓸 수 있다. 이면각의 크기가 60°이므로 이면각의 면을 포함하는 두 평면의 수직인 벡터 사이의 각은 60°와 120° 이므로 $(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin t = \pm\dfrac{1}{2}$이고 $\sin t = \pm\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$, $\cos t = \pm\dfrac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}}$를 얻을 수 있다. 그러므로 접평면에 수직인 네 개의 벡터는 $(x, y, z) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{23}}{6}, \pm\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$이고 접평면의 방정식은 $\pm\dfrac{\sqrt{23}}{6}x \pm \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}(z-3) = 0$ 이다. z축으로 3만큼 평행이동하면 $\pm\dfrac{\sqrt{23}}{6}x \pm \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z = 0$ (복호동순 아님)이다.

□ 문항 2번

문항 2 - 출제의도 및 문제해설

본 문항에서는 미분법과 적분법을 활용하여 정의된 함수의 극솟값과 함수의 그래프와 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

2-1. 최대 · 최소 정리를 이용하여 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 논리적으로 설명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
2-2. 주어진 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
2-3. 주어진 조건을 만족하는 함수의 극솟값을 구하는 과정을 논리적으로 설명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항 2 - 출제근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 II	이강섭 외	미래엔	2017	124-137 166-181

문항 2 - 채점기준

문항	채점 기준	배점
2-1	제시문 (나)에 근거하여 최솟값과 최댓값이 존재함을 서술한다.	1점
	$f''(x)=0$ 인 x 의 값을 구한다.	2점
	증감표와 그래프를 그리고 최댓값과 최솟값을 구한다.	2점
2-2	두 함수 $g_1(x)$ 와 $g_{-1}(x)$ 을 구한다.	2점
	방정식 $f(x)-g_1(x)=0$ 는 오직 하나의 실근을 가진다는 것을 논리적으로 서술한다.	2점
	방정식 $f(x)-g_{-1}(x)=0$ 는 오직 하나의 실근을 가진다는 것을 논리적으로 서술한다.	2점
	곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 적분기호로 나타낸다.	2점
	함수 $f(x)$ 를 부분적분법을 이용하여 계산한다.	2점
	치환적분법을 이용하여 계산한다.	2점
	함수 $g_1(x)$ 의 적분값을 구한다.	2점
	곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.	1점
2-3	함수 $f(x)-g_t(x)$ 의 미분계수가 0 이 되는 x 의 값$\left(t\text{와 } \frac{1}{t}\right)$을 구한다.	4점
	$\lvert t\rvert<1$ 일 때 극솟값을 구하는 과정을 논리적으로 서술한다.	5점

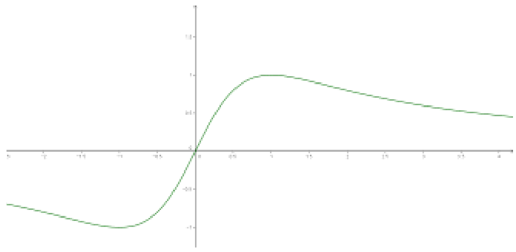
	$\lvert t\rvert > 1$ 일 때 극솟값을 구하는 과정을 논리적으로 서술한다.	5점
	함수 $h(t)$ 를 구한다.	1점

문항 2 - 예시답안

[2-1]

$f(x)=\ln(x^2+1)$ 에서 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 이고, 함수 $f'(x)$ 는 구간 $[-2,\ 2]$ 에서 연속이므로 제시문 (나)에 의해 최댓값과 최솟값을 가진다. $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=0$ 에서 $x=\pm 1$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 $x=\pm 1$ 에서 극값을 가진다. 함수 $f'(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표와 곡선 $y=f'(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.

x		-1		1	
$f'(x)$	↘	-1	↗	1	↘
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



따라서 $f'(-2)=-\dfrac{4}{5}$, $f'(2)=\dfrac{4}{5}$ 이고 $f'(-1)=-1$, $f'(1)=1$ 이므로 $f'(x)$ 의 최솟값은 $f'(-1)=-1$ 이고 최댓값은 $f'(1)=1$ 이다.

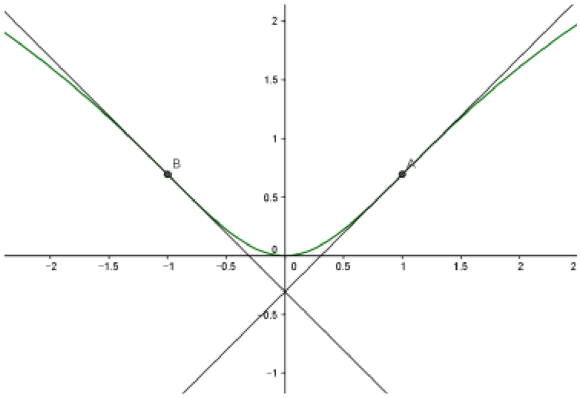
[2-2]

$g_1(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1+\ln 2$, $g_{-1}(x)=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-x-1+\ln 2$ 이다.

먼저 직선 $y=g_1(x)$ 는 점 $(1,\ \ln 2)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 접선이고, $p(x)=f(x)-g_1(x)$ 라 하면 $p'(x)=f'(x)-g_1{}'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-1=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}$ 에서 $p(x)$ 는 미분가능하고 $x\neq 1$ 일 때 $p'(x)<0$ 이므로 제시문 (다)에 의해 함수 $p(x)$ 는 감소한다. 따라서 방정식 $f(x)-g_1(x)=0$ 는 오직 하나의 실근$(x=1)$ 을 가진다.

마찬가지로 직선 $y=g_{-1}(x)$ 는 점 $(-1,\ \ln 2)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 접선이고, $q(x)=f(x)-g_{-1}(x)$ 라 하면 $q'(x)=f'(x)-g_{-1}{}'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+1=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 에서 $q(x)$ 는 미분가능하고 $x\neq -1$ 일 때 $q'(x)>0$ 이므로 제시문 (다)에 의해 함수 $q(x)$ 는 증가한다. 따라서 방정식 $f(x)-g_{-1}(x)=0$ 는 오직 하나의 실근$(x=-1)$ 을 가진다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=g_1(x)$, $y=g_{-1}(x)$ 의 그래프를 좌표평면위에 나타내면 아래와 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=g_1(x)$, $y=g_{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_{-1}^{0} f(x)-g_{-1}(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)-g_1(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{1} f(x)-g_1(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{1} f(x)dx-2\int_{0}^{1} g_1(x)dx$$

한편

$$\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1}\ln(x^2+1)dx=\int_{0}^{1}(x)'\ln(x^2+1)dx=\left[x\ln(x^2+1)\right]_0^1-\int_{0}^{1}\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$=\ln2-\int_{0}^{1}\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

여기서 $x=\tan\theta$라 치환하면 $dx=\sec^2\theta\, d\theta$이므로

$$=\ln2-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}\times\sec^2\theta\, d\theta=\ln2-2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\, d\theta$$

$$=\ln2-2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta-1\,d\theta=\ln2-2\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln2-2+\frac{\pi}{2}$$

이고,

$$\int_{0}^{1} g_1(x)dx=\int_{0}^{1}(x-1+\ln2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x+x\ln2\right]_0^1=\frac{1}{2}-1+\ln2=\ln2-\frac{1}{2}$$

이다. 그러므로

$S=2\left(\ln2-2+\frac{\pi}{2}\right)-2\left(\ln2-\frac{1}{2}\right)=\pi-3$ 이다.

[2-3]

함수 $k(x)=f(x)-g_t(x)=f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)$라 하자.

$$k'(x)=f'(x)-g_t{}'(x)=f'(x)-f'(t)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2t}{t^2+1}$$

$=\dfrac{2x(t^2+1)-2t(x^2+1)}{(x^2+1)(t^2+1)}=\dfrac{-2tx^2+2(t^2+1)x-2t^2}{(x^2+1)(t^2+1)}=\dfrac{-2(x-t)(tx-1)}{(x^2+1)(t^2+1)}=0$ 에서 $x=t$ 또는

$x=\dfrac{1}{t}$ 이다.

한편, $k''(x)=f''(x)=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ 이고, 다음 두 가지 경우로 나누어 극솟값을 구해보자.

1) $|t|<1$ 일 때

제시문 (나)와 (다)에 의해 $k'(t)=0$, $k''(t)=\dfrac{2-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}>0$ 이므로 $x=t$ 일 때 극솟값을 가지고, $k'\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$, $k''\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2-\dfrac{2}{t^2}}{\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)^2}<0$ 이므로 $x=\dfrac{1}{t}$ 일 때 극댓값을 가진다. 따라서 $h(t)=k(t)=0$ 이다.

2) $|t|>1$ 일 때

제시문 (나)와 (다)에 의해 $k'(t)=0$, $k''(t)=\dfrac{2-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}<0$ 이므로 $x=t$ 일 때 극댓값을 가지고, $k'\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$, $k''\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2-\dfrac{2}{t^2}}{\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)^2}>0$ 이므로 $x=\dfrac{1}{t}$ 일 때 극솟값을 가진다. 따라서 $h(t)=k\left(\dfrac{1}{t}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)-\dfrac{\dfrac{2}{t}}{\dfrac{1}{t^2}+1}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)-\ln\left(t^2+1\right)=\ln\left(\dfrac{1}{t^2}\right)+\dfrac{2\left(t^2-1\right)}{t^2+1}$ 이다.

1), 2)에 의해

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (|t|<1) \\ \ln\left(\dfrac{1}{t^2}\right)+\dfrac{2\left(t^2-1\right)}{t^2+1} & (|t|>1) \end{cases}$$

이다.

□ 문항 3번

문항 3 – 출제의도 및 문제해설

본 문항에서는 이항분포와 순열 및 조합을 활용하여 주어진 상황에서 특정 사건이 발생할 수 있는 확률 및 경우의 수를 정확하게 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

3-1. 영문자가 3개 이상 나타나는 경우의 수와 연속해서 3개 이상 나타나는 경우의 수를 올바르게 계산하여 이항분포의 성공의 확률을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.
3-2. 영문자가 한 조각 안에서 3개 이상 나타날 수 없다는 조건과 두 개의 조각에서 4개의 같은 영문자가 연속해서 나타나야 한다는 두 가지의 제약 조건을 가지고 순열 및 조합을 이용하여 모든 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문항 3 – 출제근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	㈜비상교육	2017	15-18 21-22 29-33 109-112

문항 3 – 채점기준

문항	채점 기준	배점
3-1	한 조각에서 한 종류의 영문자가 3개 이상 나올 확률을 구할 수 있다.	5점
	한 조각에서 한 종류의 영문자가 연속해서 3개 이상 나올 확률을 구할 수 있다.	5점
	성공의 확률을 구한 후 이항분포를 이용하여 확률 값을 구할 수 있다.	5점
3-2	첫 번째와 마지막 조각에서 3개의 영문자를 나열하는 조합 및 중복순열을 구할 수 있다.	5점
	두 번째 조각에서 3개의 영문자를 나열하는 조합 및 순열을 구할 수 있다.	5점
	세 번째 조각부터 n-1번째 조각까지의 조합 및 순열을 구할 수 있다.	5점
	네 종류의 조각에서 나오는 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	5점

문항 3 – 예시답안

[3-1]

한 조각에서 4가지 중 한 종류의 영문자가 3개 이상 나올 확률은 제시문 (라)에 의해서

$$p_1 = 4\left[{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}_5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + {}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0\right] = \frac{53}{128}$$

p_1을 성공의 확률이라고 할 때 총 n개의 조각 중에서 단 한 번의 성공도 일어나지 않을 확률은 제시문 (라)에 의해서

$$P = {}_nC_0\left(\frac{53}{128}\right)^0\left(1-\frac{53}{128}\right)^n = \left(\frac{75}{128}\right)^n$$

한 조각에서 4가지 중 한 종류의 영문자가 연속해서 3개 이상 나올 확률은

$$p_2 = 4\left[3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^5\right] = \frac{17}{128}$$

p_2을 성공의 확률이라고 할 때 총 n개의 조각 중에서 적어도 한 개 이상의 성공이 일어날 확률은 제시문 (라)에 의해서

$$Q = 1 - {}_nC_0\left(\frac{17}{128}\right)^0\left(1-\frac{17}{128}\right)^n = 1-\left(\frac{111}{128}\right)^n$$

그러므로

$$P+Q = 1-\left(\frac{111}{128}\right)^n + \left(\frac{75}{128}\right)^n$$

[3-2]

총 n개의 조각에서 모든 연결된 두 개의 조각은 연속된 4개의 동일한 영문자를 가지고 있다. 첫 번째 조각의 첫 3개의 영문자를 나열하는 경우의 수는 3개의 영문자를 중복순열한 후 3개의 영문자가 모두 동일한 경우를 제외시키는 것이므로 제시문 (다)에 의해서

$${}_3\Pi_3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$$

두 번째 조각은 4개의 영문자 중에서 3개의 영문자를 선택하여 나열하는 것이므로 제시문 (가)와 (나)에 의해서

$${}_4C_3 \cdot {}_3P_3 = 2^3 \cdot 3$$

세 번째 조각부터 $n-1$번째 조각의 경우 각 조각마다 3개의 영문자 중 2개를 선택해서 나열하는 것이므로 제시문 (가)와 (나)에 의해서

$$({}_3C_2 \cdot {}_2P_2)^{n-3} = 2^{n-3} \cdot 3^{n-3}$$

마지막 n번째 조각의 마지막 3개의 영문자를 나열하는 경우 또한 첫 번째 조각과 동일하므로

$${}_3\Pi_3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$$

위에 언급한 모든 경우의 수를 곱하게 되면 총 경우의 수는

$$2^{n+6} \cdot 3^n$$

즉, $p = n+6$이고 $q = n$이다.