

3) 의학계

문항

1

문제

【문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (\text{단, } S(x) \text{는 구간 } [a, b] \text{에서 연속이다.})$$

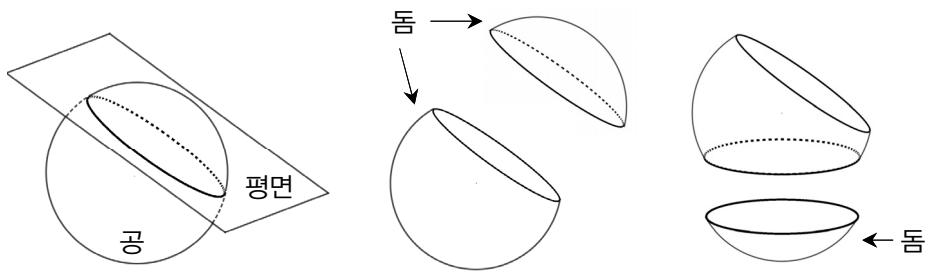
(나) 공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 구라고 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라고 한다.

(다) 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

구의 중심으로부터의 거리가 구의 반지름의 길이보다 작거나 같은 점의 집합을 공이라 하고, 구의 중심을 공의 중심, 구의 반지름을 공의 반지름이라 하자.

그림과 같이 구와 한 평면으로 둘러싸인 입체도형을 돔이라 하자.



[1-1] 반지름의 길이가 1 인 하나의 공에서 크기가 같은 돔 6 개를 잘라내고자 한다. 돔의 크기가 최대가 되도록 잘랐을 때, 잘라내고 남은 입체도형을 A 라 하자. 입체도형 A 를 설명하고, 그 부피를 구하시오. (20점)

[1-2] [1-1]의 입체도형 A 에서 최대한 큰 돔 하나를 더 잘라내었다. 마지막으로 잘라낸 돔의 평면 부분의 넓이를 구하시오. (10점)

출 제 의 도

본 문항에서는 구와 평면이 만나는 경우의 기하학적 성질을 이해하고 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 문제 상황을 파악하고 상황에 맞는 구와 평면과의 위치 관계를 이해하여, 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 상황에 맞도록 입체도형과 평면과의 위치 관계를 이해하고, 평면의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문 제 해 설

공간도형은 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 여러 가지 건축물에서 직선이나 평면 또는 곡선으로 나타나므로 실생활에서 많이 활용됨을 알 수 있다. 본 문항은 구와 평면과 만나는 경우의 기하학적인 성질을 이해하고 입체도형의 부피를 구하는 방법을 이용하여 원하는 부피를 구하고, 평면의 방정식과 점과 평면 사이의 거리를 구하는 방법을 이용하여 상황에 맞도록 문제를 해결하고, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

평 가 기 준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1]	6개의 돔을 잘라내고 남은 입체도형을 설명할 수 있다.	8
	입체도형의 부피를 계산할 수 있다.	12
[1-2]	잘라내고자 하는 돔에 관한 평면을 찾을 수 있다.	5
	점과 평면 사이의 거리를 통해 평면부분의 넓이를 계산할 수 있다.	5

예 시 답 안

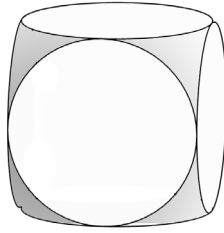
[1-1]

돔은 구와 한 평면으로 둘러싸인 입체도형이므로 돔의 평면 부분의 둘레는 원이 된다.

하나의 공에서 겹치지 않는 2개의 돔을 생각할 때, 크기가 같은 경우는 공의 중심에서 2개의 돔을 결정하는 두 평면사이의 거리가 같은 경우이다. 돔의 크기가 최대가 되도록 자르는 경우 두 돔의 평면부분이 서로 접하게 된다.

그러므로 크기가 같은 3개 이상의 돔을 잘라낼 때, 잘라낸 돔의 크기가 최대가 되려면 이웃하는 돔의 평면부분이 서로 접해야 한다.

크기가 같은 3개의 돔을 잘라서 남은 부분의 부피가 최소가 되어야 하므로 다음과 같이 생각할 수 있다. 공의 중심을 좌표공간의 원점에 두고 평면 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=1$, $z=-1$ 에 평행한 평면으로 자른다고 할 때, 남은 부분의 부피가 최소가 되는 경우는 임의의 하나의 돔의 평면부분이 이웃하는 4개의 돔의 평면부분과 서로 접할 경우의 6개의 돔을 잘라내고 남은 입체도형이 구하고자 하는 입체도형 A이다. 그림으로 나타내면 다음과 같다.



공의 중심을 좌표공간의 원점에 두고 평면 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=1$, $z=-1$ 에 평행한 평면으로 자른다고 할 때, 돔들이 처음으로 서로 접하는 경우를 생각한다. xy 평면에 놓인 접점들은 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형이므로

평면 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에 의해 생기는 돔을 잘라낼 때 남은 부분의 부피가 최소가 된다.

남은 부분의 부피를 구하기 위해 돔 하나의 부피를 구한다.

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에 의해 생기는 돔 중 부피가 작은 돔은 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$ 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{1-x^2}$ 인 원판으로 이루어진 입체도형이므로 제시문 (가)에 의하여

잘라낸 돔 하나의 부피는 $\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (1-x^2)dx = \frac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi$ 이다.

반지름의 길이가 1인 공은 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이 $\sqrt{1-x^2}$ 인 원판으로 이루어진 입체도형이므로 제시문 (가)에 의하여 $\pi \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

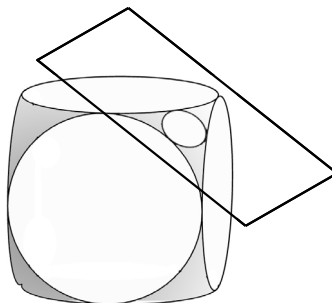
따라서 돔의 크기가 최대가 되도록 잘라내고 남은 입체도형 A의 부피는

(공의 부피) - $6 \times$ (돔 하나의 부피) = $\frac{15\sqrt{2}-16}{6}\pi$ 이다.

[1-2]

[1-1]에서 구한 입체도형 A는 반지름의 길이 $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원판 6개와 서로 모양이 같은 구의 일부분 8개로 둘러싸여 있다.

크기가 가장 큰 돔을 제외하기 위해서는 입체도형 A에서 구의 일부 중 인접한 세 원들과 모두 접하는 평면으로 잘라내는 것이다.



새로운 돔을 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 인 부분에서 잘라낸다고 할 때, 원 3개에 모두 접하는 평면의 법선벡터는 대칭성에 의해 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 가 되고, 평면과 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에 놓인 중심이 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원과의 접점은 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

따라서 구하는 평면의 방정식은 제시문 (다)에 의하여 $x + y + z - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ 이다.

공의 중심인 원점에서 평면 $x + y + z - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ 사이의 거리는 $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6}$ 이다. 마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 원의 반지름의 길이를 r_2 라 하면 피타고라스의 정리에 의하여

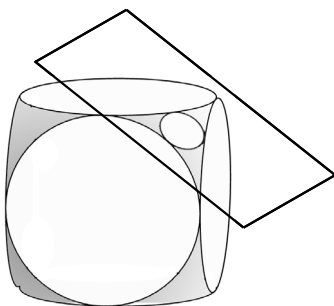
$$r_2^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6} \text{ 이므로}$$

마지막으로 잘라낸 평면부분의 넓이는 $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}\pi$ 이다.

[1-2] 별해

[1-1]에서 구한 입체도형 A는 반지름의 길이 $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원판 6개와 서로 모양이 같은 구의 일부분 8개로 둘러싸여 있다.

크기가 가장 큰 돔을 제외하기 위해서는 입체도형 A에서 구의 일부 중 인접한 세 원들과 모두 접하는 평면으로 잘라내는 것이다.



새로운 돔을 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 인 부분에서 잘라낸다고 할 때, 원 3개에 모두 접하는 평면의 법선벡터는 대칭성에 의해 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 가 되고 평면과 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에 놓인 중심이

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원과의 접점은 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 평면과

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에 놓인 중심이 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원과의 접점은

$Q\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 평면과 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에 놓인 중심이 $\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인

원과의 접점은 $R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다. 세 점 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 을 지나는 평면의 방정식은 $x + y + z - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ 이다.

마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 원의 반지름의 길이를 r_2 라 하면 세 점 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$Q\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 을 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 외접원이다.

정삼각형이므로 $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} PQ$ 이므로 $r_2^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}$ 이고 마지막으로 잘라낸 평면부분의 넓이는

$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}\pi$ 이다.

문항

2

문제

【문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 두 근을 α , β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(나) 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x 에 대하여

1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.

2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

[2-1] $p > 0$ 일 때, 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+p^2}}$ 의 최솟값을 구하시오. (25점)

[2-2] $ab \geq 3$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

출제 의 도

본 문항에서는 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있고, 제시된 부등식이 성립함을 보이는데 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 도함수의 부호를 판단하고 극값과 양 끝에서의 함수값과 극한값을 비교하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 함수의 최솟값을 활용하여 제시된 부등식이 성립함을 보일 수 있는지 평가하는 문항이다.

문제 해설

함수의 미분은 주어진 함수를 미분하여 얻은 도함수로부터 함수의 그래프의 개형을 알고, 이것을 활용하여 실생활에서 적용되는 다양한 문제, 예를 들면 여러 가지 상황에서의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제 또는 절대부등식을 증명하는 문제 등을 해결하는데 유용하게 활용된다. 본 문항은 주어진 함수를 미분하여 도함수를 구하고 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계 등을 이용하여 도함수의 부호를 판정하고 극값과 양 끝에서의 함수값과 극한값의 크기를 비교하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지, 또 그 결과를 제시된 절대부등식을 보이는데 활용할 수 있는 능력이 있는지를 평가한다.

평 가 기 준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1]	도함수를 구하고 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 도함수의 부호를 조사할 수 있다.	13
	함수의 증가, 감소 하는 구간을 구하고 극값과 양 끝에서의 함숫값과 극한값을 구할 수 있다.	7
	함수의 최솟값을 구할 수 있다.	5
[2-2]	원하는 부등식을 보이기 위해 [2-1]의 결과를 이용한다.	3
	함숫값의 최솟값을 이용하여 원하는 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	7

예 시 답 안

[2-1]

 $x > 0$ 에 대하여

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p^2}{2\sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}} + p^2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(x+p^2)^{\frac{3}{2}}} \text{으로부터}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow p^2(1+x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow p^4(1+x)^3 - x(x+p^2)^3 = 0 \text{이다.}$$

$$0 = p^4(1+x)^3 - x(x+p^2)^3 = (p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2\} \text{ 이고}$$

$$x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2 = 0 \text{의 판별식은}$$

$$D = p^4(p^2 - 3)^2 - 4p^2 = p^2\{p^2(p^2 - 3)^2 - 4\} = p^2(p^2 - 1)^2(p^2 - 4) \text{이다.}$$

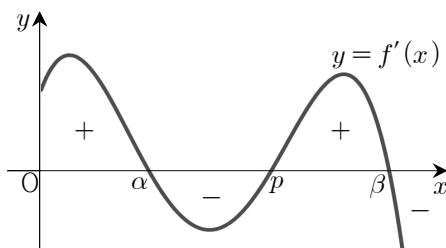
(i) $p > 2$ 일 때, $D > 0$ 이므로 $x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2 = 0$ 는 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 갖고, 제시문 (가)에 의하면

$$\alpha + \beta = p^2(p^2 - 3) > 0, \alpha\beta = p^2 > 0 \text{이므로 } 0 < \alpha < p < \beta \text{이다.}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow p^4(1+x)^3 - x(x+p^2)^3 \geq 0 \text{이므로}$$

 $f'(x)$ 의 부호는 $p^4(1+x)^3 - x(x+p^2)^3$ 의 부호와 일치한다.

$$p^4(1+x)^3 - x(x+p^2)^3 = (p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2\} \text{의 부호를 조사하면}$$



제시문 (나)를 이용하여 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	...	α	...	p	...	β	...
$f'(x)$		+		-		+		-
$f(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 = f(0)$ 이고

$p \geq 3$ 이면 $f(p) = \frac{2}{\sqrt{1+p}} \leq 1$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{1+p}}$ 이고

$2 < p < 3$ 이면 $f(p) = \frac{2}{\sqrt{1+p}} > 1$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 1이다.

(ii) $0 < p \leq 2$ 일 때

• $p \neq 1, p \neq 2$ 이면 $D < 0$ 이므로

$0 < x < p$ 이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2\} > 0$ 이고

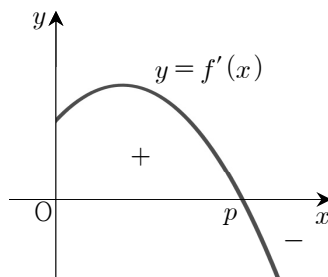
$x > p$ 이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2\} < 0$ 이다.

• $p = 1$ 또는 $p = 2$ 이면 $D = 0$ 이고

$0 < x < p$ 이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2\} > 0$ 이고

$x > p$ 이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2 - 3)x + p^2\} < 0$ 이다.

$f'(x)$ 의 부호를 조사하면



제시문 (나)를 이용하여 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	...	p	...
$f'(x)$		+		-
$f(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 = f(0)$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 1이다.

그러므로 (i)과 (ii)에 의하여 $p \geq 3$ 이면 $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{1+p}}$ 이고, $0 < p < 3$ 이면 $f(x)$ 의 최솟값은 1이다.

[2-2]

[2-1]의 결과에 의하면

$ab \geq 3$ 이면 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a^2b^2}}$ 는 최솟값 $\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ 을 가지므로

모든 $x \geq 0$ 에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a^2b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ 이다.

그러므로 $x = a^2$ 일 때

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2+a^2b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

즉, $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ 가 성립한다.

문항

3

문제

【문항 3】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

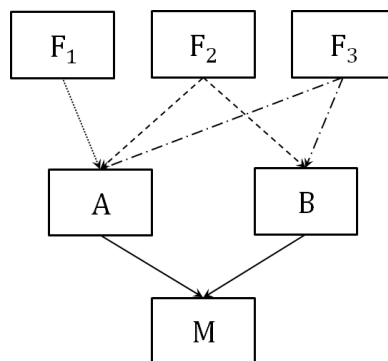
(나) 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A) > 0)$$

(다) 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \quad (\text{단, } P(A) > 0, P(B) > 0)$$

그림과 같이 3개의 공장 F_1, F_2, F_3 에서 생산된 휴대폰이 물류센터 A 또는 B 를 거쳐서 본사 M 에 배송된다. 각각의 공장에서는 동일한 수의 휴대폰을 생산하며, 각 공장마다 두 종류의 휴대폰(스마트폰과 폴더폰)을 생산하고 있다. 공장 F_1 에서는 스마트폰 90%, 폴더폰 10%, 공장 F_2 에서는 스마트폰 80%, 폴더폰 20%, 공장 F_3 에서는 스마트폰 70%, 폴더폰 30%의 비율로 생산한다. 공장 F_1 에서 생산한 휴대폰은 모두 물류센터 A 로 보낸다. 공장 F_2 에서 생산한 스마트폰의 50%와 폴더폰의 50%는 물류센터 A 로 보내고 나머지는 물류센터 B 로 보낸다. 공장 F_3 에서 생산한 스마트폰의 75%와 폴더폰의 75%는 물류센터 A 로 보내고 나머지는 물류센터 B 로 보낸다.



[3-1] 본사 M 에서 임의로 휴대폰 2대를 선택하였다. 선택한 2대의 휴대폰이 서로 다른 종류이면서 서로 다른 공장에서 생산되었고 서로 다른 물류센터를 거쳐 배송된 휴대폰일 확률을 구하시오. (15점)

[3-2] 본사 M 에서 n 대의 휴대폰을 선택하여 일렬로 나열하였다. 이웃한 휴대폰은 반드시 서로 다른 종류이면서 서로 다른 공장에서 생산되었고 서로 다른 물류센터를 거쳐 배송된 휴대폰이어야 한다. 이러한 방법으로 총 n 대의 휴대폰을 나열하는 경우의 수를 k_n 이라고 할 때, k_{11} 과 k_{18} 의 값을 각각 구하시오. (20점)

(예) $n = 8$ 일 경우 (S:스마트폰, D:폴더폰)

$$\begin{aligned} &ASF_2 - BDF_3 - ASF_1 - BDF_2 - ASF_3 - BDF_2 - ASF_1 - BDF_3 \\ &BSF_2 - ADF_3 - BSF_2 - ADF_1 - BSF_3 - ADF_1 - BSF_2 - ADF_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

출 제 의 도

본 문항에서는 조건부확률을 이용한 확률의 곱셈정리와 배반사건에서의 확률의 덧셈정리를 활용하여 주어진 사건이 발생할 수 있는 확률과 경우의 수를 구할 수 있는지 평가하고자 한다.

[3-1] 조건부확률의 곱셈정리와 배반사건에서의 확률의 덧셈정리를 활용하여 여러 가지 사건이 동시에 일어날 수 있는 확률을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

[3-2] 어떤 규칙적인 사건들이 연속해서 발생하는 경우 그 규칙성을 찾아서 발생할 수 있는 모든 경우의 수를 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

문 제 해 설

확률 및 경우의 수 계산은 실제 생활에 일어날 수 있는 여러 가지 불확실한 문제들을 예측하는 데 있어 크게 활용되는 통계적인 도구이다. 본 문항의 핵심적인 내용은「확률과 통계」의 ‘조건부확률’과 ‘경우의 수’ 단원에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 여러 가지 사건이 발생할 수 있는 문제에서 각각의 사건이 일어날 수 있는 상황을 올바르게 이해하고 각 사건이 일어날 확률 및 조건부확률을 정확하게 계산할 수 있는지, 또한 모든 사건이 발생할 수 있는 경우의 수 계산 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지 평가한다.

평 가 기 준

하위문항	채점 기준	배점
[3-1]	각 물류센터에 배송된 휴대폰의 종류 및 제조 공장에 대한 조건부확률을 구할 수 있다.	5
	확률의 합의 법칙을 이용하여 각 물류센터에 배송된 휴대폰의 확률을 구할 수 있다.	5
	확률의 곱의 법칙을 이용하여 서로 다른 휴대폰에 대한 확률을 구할 수 있다.	5
[3-2]	각 휴대폰마다 연속해서 나열할 수 있는 휴대폰의 경우의 수를 구할 수 있다.	5
	첫 번째 휴대폰의 종류에 따라 규칙을 찾아 분류할 수 있다.	10
	위 분류를 활용하여 귀납적으로 k_{11} 과 k_{18} 의 값을 구할 수 있다.	5

예 시 답 안

[3-1]

선택된 휴대폰이 물류센터 A, B 에서 배송된 사건을 각각 A, B 라고 정의하고 공장 F_1, F_2, F_3 에서 생산된 사건을 각각 F_1, F_2, F_3 이라고 정의한다.

3 개의 공장에서 생산된 휴대폰의 수는 동일하므로 $P(F_1) = P(F_2) = P(F_3) = \frac{1}{3}$ 이고 제시문 (가), (나)에 의해서 사건 A 와 F_1 이 동시에 일어날 확률은

$$P(A \cap F_1) = P(A|F_1)P(F_1) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

같은 방법으로 $A \cap F_2, A \cap F_3, B \cap F_2, B \cap F_3$ 의 확률은 다음과 같다.

$$P(A \cap F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap F_3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad P(B \cap F_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

각 공장에서 물류센터 A 또는 B로 보내지는 스마트폰과 폴더폰의 비율은 각 공장의 생산 비율과 동일하므로 본사 M에서 선택된 휴대폰의 확률은 다음과 같다.

(1) 물류센터 A

	스마트폰	폴더폰
공장 F_1	$\frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$
공장 F_2	$\frac{8}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$	$\frac{2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
공장 F_3	$\frac{7}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{40}$	$\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{40}$

(2) 물류센터 B

	스마트폰	폴더폰
공장 F_1	0	0
공장 F_2	$\frac{8}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$	$\frac{2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
공장 F_3	$\frac{7}{10} \times \frac{1}{12} = \frac{7}{120}$	$\frac{3}{10} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{40}$

본사 M에서 선택된 2대의 휴대폰이 서로 다른 종류이면서 서로 다른 공장에서 생산되었고 서로 다른 물류센터를 거쳐 배송된 휴대폰일 확률은 제시문 (다)에 의하여

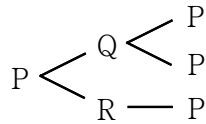
$$2 \left[\frac{2}{15} \left(\frac{1}{30} + \frac{3}{40} \right) + \frac{7}{120} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} \right) + \frac{1}{30} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{40} \right) + \frac{1}{40} \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{15} \right) \right] = 2 \left[\frac{11}{600} + \frac{2}{75} \right] = \frac{9}{100}$$

[3-2]

선택할 수 있는 휴대폰의 종류는 $BSF_2, BSF_3, BDF_2, BDF_3, ASF_1, ADF_1, ASF_2, ASF_3, ADF_2, ADF_3$ 이다. 이 중에서 물류센터 B에서 배송된 휴대폰의 그룹을 P, F_1 공장에서 생산하고 물류센터 A에서 배송된 휴대폰의 그룹을 Q, F_2 또는 F_3 공장에서 생산하고 물류센터 A에서 배송된 휴대폰의 그룹을 R이라고 하자. 즉,

P	BSF ₂ , BSF ₃ , BDF ₂ , BDF ₃
Q	ASF ₁ , ADF ₁
R	ASF ₂ , ASF ₃ , ADF ₂ , ADF ₃ ,

P 그룹 휴대폰을 처음 나열하는 수형도는 다음과 같다.



P 그룹 휴대폰 다음엔 반드시 Q 그룹 또는 R 그룹 휴대폰이 오며, Q 그룹 휴대폰 다음엔 반드시 P 그룹 휴대폰 2종류가 각각 오게 되고, R 그룹 휴대폰 다음엔 P 그룹 휴대폰이 반드시 와야 한다. 위 규칙에 의하여 표로 나타내면

휴대폰	P	Q	R
1대	1	1	1
2대	$1 + 1 = 2$	$1 \times 2 = 2$	1
3대	$2 + 1 = 3$	$2 \times 2 = 4$	2
4대	$4 + 2 = 6$	$3 \times 2 = 6$	3
5대	3^2	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3$
⋮	⋮	⋮	⋮
11대	3^5	$2^2 \cdot 3^4$	$2 \cdot 3^4$
12대	$2 \cdot 3^5$	$2 \cdot 3^5$	3^5
⋮	⋮	⋮	⋮
18대	$2 \cdot 3^8$	$2 \cdot 3^8$	3^8

P 그룹, Q 그룹, R 그룹 휴대폰은 각각 4종류, 2종류, 4종류이므로

$$k_{11} = 4 \cdot 3^5 + 2 \cdot 2^2 \cdot 3^4 + 4 \cdot 2 \cdot 3^4 = 7 \cdot 2^2 3^4$$

$$k_{18} = 4 \cdot 2 \cdot 3^8 + 2 \cdot 2 \cdot 3^8 + 4 \cdot 3^8 = 2^4 \cdot 3^8$$