2017학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	□	☑	□

□ 자연계 1번

[1-1]

함수$f(x)$의 이계도함수를 구하면

$$f''(x) = f'(x)(2-f(x)) - f(x)f'(x)$$
$$= 2f'(x)(1-f(x)) = 2f(x)(1-f(x))(2-f(x))$$

임.

또한 함수$f(x)$가 $0 < f(x) < 2$이면 $f'(x)$의 값이 양이므로 **제시문[가]**에 의하여 함수 $f(x)$는 증가함.

따라서 중간값 정리에 의하여 $f(a) = 1$인 점 $\mathrm{P}(a,1)$이 반드시 존재하고 또한 $f''(a) = 0$임.
그리고 $x = a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음, 즉 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀜.
그러므로 **제시문[나]** 에 의하여 $\mathrm{P}(a,1)$는 곡선$f(x)$의 변곡점임.

[1-2]

모든 실수 x에 대하여 $0 < f(x) < 2$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))} = 1$$

이고 양변에 x에 대하여 부정적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}dx = \int 1dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

제시문[다] 에 의하여 $y = f(x)$로 치환하면 $dy = f'(x)dx$이고

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}dx = \int \frac{1}{y(2-y)}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}dy$$
$$= \frac{1}{2}(\ln y - \ln(2-y))$$

① 에서

$$\frac{1}{2}(\ln y - \ln(2-y)) = x + c \text{ (상수 } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln y - \ln(2-y) = \ln\frac{y}{2-y} = 2x + 2c$$

양변에 지수함수를 취하면

$$\frac{y}{2-y} = e^{2x}e^{2c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

이고 $x = 0$일 때 $f(0) = y = \frac{1}{3}$ 이므로 ②에서 $e^{2c} = \frac{1}{5}$ 임.

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{2-y} = \frac{1}{5}e^{2x}$$

$$\therefore \quad y = f(x) = \frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}} = \frac{2}{1+5e^{-2x}}$$

□ 자연계 2번

[2-1]

X를 A 문항을 선택한 100 명 중 정답자의 수라고 정의하자. 그러면 X는 이항분포$(n=100,\ p=0.7)$를 따르고, 제시문 [가]에 의해 근사적으로 평균은 70 이고 분산이 21 인 정규분포를 따르게 된다. 치료된 환자의 수가 60 명 이상일 확률은 $P(60 \le X \le 100)$ 이고 제시문 [나]에 의해서

$$P(60 \le X \le 100) = P\left(\frac{60-70}{\sqrt{21}} \le Z \le \frac{100-70}{\sqrt{21}}\right) = P\left(Z \le \frac{30}{\sqrt{21}}\right) - P\left(Z \le -\frac{10}{\sqrt{21}}\right)$$
$$= 1 - P\left(Z > \frac{30}{\sqrt{21}}\right) - P\left(Z \le \frac{-10}{\sqrt{21}}\right).$$

마찬가지로 Y를 B 문항을 선택한 100 명 중 정답자의 수라고 정의하자. 그러면 Y는 이항분포$(n=100,\ p=0.8)$를 따른다. 제시문 [가]에 의해 정규분포로 근사시킬 경우 Y는 평균이 80 이고 분산이 16 인 정규분포를 따른다. 치료된 환자의 수가 70 명 이상일 확률은 $P(70 \le Y \le 100)$이고 제시문 [나]에 의해서

$$P(70 \le Y \le 100) = \mathrm{P}\left(\frac{70-80}{4} \le Z \le \frac{100-80}{4}\right) = P\left(Z \le \frac{20}{4}\right) - P\left(Z \le -\frac{10}{4}\right)$$
$$= 1 - P(Z > 5) - P\left(Z \le \frac{-10}{4}\right).$$

제시문 [다]에 의해서 $P(Z>5) \approx 0.00001$ 이고 $P\left(Z > \frac{30}{\sqrt{21}}\right) < P(Z>5) \approx 0.00001$이므로 두 확률 $P\left(Z > \frac{30}{\sqrt{21}}\right)$ 와 $P(Z>5)$ 은 모두 0에 가깝다고 할 수 있다. 그리고 $P\left(Z \le \frac{-10}{4}\right) < P\left(Z \le \frac{-10}{\sqrt{21}}\right)$ 이므로, $P(60 \le X \le 100) < P(70 \le Y \le 100)$. 즉, 후자의 확률이 더 높다.

[2-2]

B 문항의 정답률 p_B 의 95% 신뢰구간의 길이는 제시문 [라]를 이용하면 다음과 같다.

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

B 문항을 선택한 학생들의 수 n은 어떤 큰 값으로 고정되어 있기 때문에 신뢰구간의 길이는 표본비율 $\hat{p}$ 에 대한 함수이며, 이 길이가 최대값을 가질 경우는 $\hat{p} = \frac{1}{2}$일 때이다. $\hat{p_1}$ 이 B 문항을 선택한 남학생들 중 정답자의 비율이라 두고, $\hat{p_2}$ 를 B 문항을 선택한 여학생들 중 정답자의 비율이라고 하자. 그리고 n_1 과 n_2 는 각각 B 문항을 선택한 남학생들의 수와 자와 여학생들의 수라고 표시하자. 그러면 B 문항을 선택한 학생들 중 정답자의 비율은 다음과 같다.

$$\hat{p} = \frac{\hat{p_1} n_1 + \hat{p_2} n_2}{n_1 + n_2}$$

그리고 주어진 문제에 의해서

$$n_1 = \left(1 + \frac{k}{100}\right) n_2, \qquad \hat{p_2} = \left(1 - \frac{m}{100}\right) \hat{p_1}$$

이다. 이 두 식을 위의 $\hat{p}$에 대입하면

$$\hat{p} = \frac{\left(1 + \frac{k}{100}\right) + \left(1 - \frac{m}{100}\right)}{\left(1 + \frac{k}{100}\right) + 1} \hat{p_1}$$

이고, $\hat{p} = \frac{1}{2}$이 되어야 하므로 최종적으로

$$\hat{p_1} = \frac{200 + k}{400 + 2(k - m)}$$

이다.

□ 자연계 3번

[3-1]

선분 OX 의 연장선 위에 $\overrightarrow{XO}=\overrightarrow{OA}$ 가 되도록 점 A 를 잡는다.
점 A 를 지나고 선분 OZ 와 평행한 직선이 선분 OY (또는 선분 OY 의 연장선)와 만나는 점을 B 라 하고, 점 A 를 지나고 선분 OY 와 평행한 직선이 선분 OZ (또는 선분 OZ 의 연장선)와 만나는 점을 C 라 하자.

X

O

π - γ

C

Z

B π - α

Y

π -β

A

그러면 △OAB 에서

$$\overline{BO}\,\overline{BA}sin(\pi-\alpha)=\overline{AO}\,\overline{AB}sin(\pi-\beta)=\overline{OB}\,\overline{OA}sin(\pi-\gamma)$$

또는

$$\overline{OB}\,\overline{AB}sin\alpha=\overline{OA}\,\overline{AB}sin\beta=\overline{OB}\,\overline{OA}sin\gamma$$

이다. $\overline{OA}=1$ 므로

$$\overline{OB}sin\alpha=\sin\beta,\ \overline{AB}sin\alpha=\sin\gamma$$

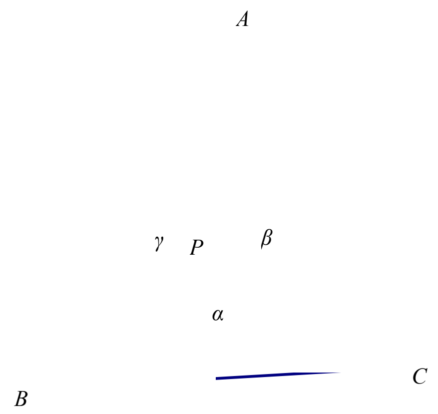
이 된다. 따라서 $\overline{OB}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ 이고 $\overline{AB}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ 이다.

□OBAC 는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ 이고, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 이다.

$-\overrightarrow{OX}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\overrightarrow{OY}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\overrightarrow{OZ}$ 이므로

$\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}=\vec{0}$

[3-2]



$\angle \mathrm{BPC}=\alpha$, $\angle \mathrm{CPA}=\beta$, $\angle \mathrm{APB}=\gamma$, $\overline{\mathrm{PA}}=a$, $\overline{\mathrm{PB}}=b$, $\overline{\mathrm{PC}}=c$라 두면

$p=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $q=\frac{1}{2}ca\sin\beta$, $r=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PY}}=\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PY}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ 라 두면

3-1에 의해서 $\sin\alpha\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\sin\beta\overrightarrow{\mathrm{PY}}+\sin\gamma\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\vec{0}$, 또는

$\sin\alpha(\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PA}})+\sin\beta(\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PB}})+\sin\gamma(\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{PC}})=\vec{0}$ 이다.

양변에 $\frac{1}{2}abc$ 를 곱하면

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\frac{1}{2}ca\sin\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\frac{1}{2}ab\sin\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ 이고

따라서 $p\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}+q\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+r\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ 이다.