2017학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	☐	☐	☑

☐ 의학계 1번

[1-1]

제시문(가)에 의해 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$의 값이 존재하여야 한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}$$

이다. 여기서 $-\left|x^{n-1}\right|\le x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}\le\left|x^{n-1}\right|$이고, $\lim_{x\to 0}\left(-\left|x^{n-1}\right|\right)=\lim_{x\to 0}\left|x^{n-1}\right|=0$

$(\because n\ge 2)$ 이므로, 제시문(다)에 의해서 $\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}=0$ 이다. 따라서 $f'(0)=0$ 으로 존재하므로, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

[1-2]

$a=x,\ ab=x+h$ 라 두면 $b=\frac{x+h}{a}=\frac{x+h}{x}$ 이고, a, b 는 양수이다. 이를 부등식

$g(ab)\le g(a)+g(b)-1$ 에 대입하면, $g(x+h)\le g(x)+g\left(\frac{x+h}{x}\right)-1$ 이다. 여기서 부등식 $g(b)\le b$ 에

의하여 $g\left(\frac{x+h}{x}\right)\le\frac{x+h}{x}$이므로, $g(x+h)\le g(x)+\frac{x+h}{x}-1=g(x)+\frac{h}{x}$ 이 성립한다. 즉,

$g(x+h)-g(x)\le\frac{h}{x}$ ----①

이 성립한다.

또한, $a=x+h,\ ab=x$ 라 두면, $b=\frac{x}{a}=\frac{x}{x+h}$이고, a, b 는 양수이다. 이를 부등식

$g(ab)\le g(a)+g(b)-1$ 에 대입하면, $g(x)\le g(x+h)+g\left(\frac{x}{x+h}\right)-1$ 이다. 여기서 부등식 $g(b)\le b$ 에

의하여 $g\left(\frac{x}{x+h}\right)\le\frac{x}{x+h}$ 이므로, 부등식 $g(x)\le g(x+h)+\frac{x}{x+h}-1=g(x+h)-\frac{h}{x+h}$

이 성립한다. 즉, $\frac{h}{x+h}\le g(x+h)-g(x)$ ------②

이 성립한다.

최종적으로 ①, ②에서 $\frac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \frac{h}{x}$ 이다.

[1-3]

(i) $h>0$ 일 때, [5-2]의 결론에 의해 $\frac{1}{x+h} \le \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \le \frac{1}{x}$ 이고, 제시문(다)에 의해 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{x}$ 이다.

(ii) $h<0$ 일 때, $|h|$ 를 충분히 작게 하면 $x+h>0$ 이므로, [5-2]의 풀이과정과 같이 양수 a, b를 택할 수 있고, [5-2]와 똑같은 결론 $\frac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \frac{h}{x}$ 을 얻는다. 여기서 h 가 음수이므로, 양변을 h 로 나누면 $\frac{1}{x+h} \ge \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \ge \frac{1}{x}$ 를 얻는다. 그러면 제시문(다)에 의해 $\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{x}$ 이다.

최종적으로 (i), (ii)와 제시문(나)에 의해서, $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{x}$ 이다.

□ 의학계 2번

[2-1] $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,t)$라 두면 $(t-n)^2=4(s-m)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(m+1,n)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{FP}}=(s-m-1,t-n)$이다.

또, $y'=\dfrac{2}{y-n}$이므로

점 P에서의 포물선의 접선 l은 $y=\dfrac{2}{t-n}(x-s)+t$이다.

따라서 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(t-n,2)$라 둘 수 있다.

한편, 대칭축은 x축과 평행하므로 방향벡터는 $\vec{h}=(1,0)$이라 둘 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{FP}}$와 $\vec{u}$가 이루는 각을 θ_1, $\vec{h}$와 $\vec{u}$가 이루는 각을 θ_2라고 하면

$$\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{FP}}||\vec{u}|}=\frac{(s-m-1)(t-n)+2(t-n)}{\sqrt{(s-m-1)^2+(t-n)^2}\sqrt{(t-n)^2+4}}$$

$$=\frac{t-n}{\sqrt{(t-n)^2+4}}\ (\because\ (t-n)^2=4(s-m)),$$

$$\cos\theta_2=\frac{\vec{h}\cdot\vec{u}}{|\vec{h}||\vec{u}|}=\frac{t-n}{\sqrt{(t-n)^2+4}}$$ 이므로 $\theta_1=\theta_2$ 이다.

즉, 접선 l에 대한 입사각과 반사각이 같다.

따라서 밑줄 친 부분이 성립함을 알 수 있다.

[2-2] $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=k\vec{u}\ (k>0)$라 하면,

점 H는 초점 F의 직선 l 위로의 정사영이므로 $k|\vec{u}|=|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|\cos\theta_1$이다.

문1-1에서 $\cos\theta_1=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{FP}}||\vec{u}|}$이므로

대입하여 정리하면 $k=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}||\vec{u}|}$이다. 따라서

$$\text{벡터 } \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}||\vec{u}|}\vec{u}=\frac{(s-m+1)(t-n)}{(t-n)^2+4}(t-n,2)$$

$$=\frac{t-n}{4}(t-n,2)\text{이다. } (\because\ (t-n)^2=4(s-m))$$

한편, $\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{FP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{FP}}-\overrightarrow{\mathrm{HP}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=(s-m-1,t-n)-\left(\frac{(t-n)^2}{4},\frac{t-n}{2}\right)=\left(-1,\frac{t-n}{2}\right)\text{이다. } (\because\ (t-n)^2=4(s-m))$$

여기서 $2\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{FG}}=(-2,t-n)$이고 점 G의 좌표는 $(m-1,t)$이다.

그러므로 점 G의 자취는 $x=m-1$이고 포물선의 준선이다.

□ 의학계 3번

[3-1]

2개의 직선을 먼저 그으면 최대 4조각까지 나눌 수 있다. 마지막으로 긋는 세 번째 직선을 이미 그려진 두 개의 직선과 각각 한 점에서 만나게, 그리고 두 직선의 교점을 지나지 않게 그으면,

즉 이미 그어진 직선들과 평행하지 않고 모두 만나게 그으면 새로 그려진 직선이 3등분 되면서 먼저 나눠진 조각 3개가 둘로 나뉜다. 그러므로 3개의 조각이 늘어나 총 7개가 된다.

즉 서로 다른 두 직선은 한 점에서 만나고 --------(3점)

어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때 --------(3점)

조각의 개수가 최대이다. n개의 직선을 그어 원과 그 내부를 최대로 분할한 수를 $c_2(n)$이라 하면

$n=1, 2, \cdots, 5$ 일 때 $c_2(1)=2$

$$c_2(2)=2+2=4$$
$$c_2(3)=4+3=7$$
$$c_2(4)=c_2(3)+4=11$$

따라서 $c_2(5)=c_2(4)+5=16$ 이다. --------(4점)

[3-2]

$c_2(n)$은 기존에 그어진 서로 평행하지 않은 $n-1$개의 직선으로 나눠진 분할에서, 이미 그어진 직선과 평행하지 않는 새로운 직선 하나를 그어 $n-1$개의 직선과 만나서 n개의 영역을 2개로 나누므로, n개의 영역이 더 생긴다.

그러므로 $c_2(k)=c_2(k-1)+k \quad (k=2, \cdots, n)$ 이다. --------(5점)

따라서
$$\begin{aligned} c_2(n) &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+c_2(1) \\ &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+1 \\ &= {}_{n+1}C_2+1={}_nC_2+{}_nC_1+{}_nC_0 \quad \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$
이다. --------(5점)

[3-3]

n개의 평면으로 구와 그 내부를 최대로 분할한 수를 $c_3(n)$이라 하자.

$c_3(n)$은 기존에 그어진 서로 평행하지 않은 $n-1$개의 평면으로 나눠진 구와 그 내부의 분할에서, n번째 평면으로 자르면 그 단면은 원과 그 내부이다. 이때 잘린 원과 그 내부는 n번째 평면과 그 전에 자른 $n-1$개의 평면과의 교선으로 나눠진 형태를 가진다. 그러므로 $c_2(n-1)$개의 조각이 모두 둘로 나눠지게 되므로

$c_3(k)=c_3(k-1)+c_2(k-1) \quad (k=2, \cdots, n)$ 이다. --------(5점)

①을 이용하여
$$\begin{aligned} c_3(n) &= c_3(1)+\sum_{k=1}^{n-1} c_2(k) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}({}_kC_2+{}_kC_1+{}_kC_0) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}{}_kC_2+\sum_{k=1}^{n-1}{}_kC_1+\sum_{k=1}^{n-1}{}_kC_0 \\ &= 2+({}_nC_3-{}_1C_2)+{}_nC_2+({}_nC_1-{}_0C_0) \end{aligned}$$

$={}_nC_3+{}_nC_2+{}_nC_1+{}_nC_0$ 이다. --------(5점)

(별해 1) $c_3(n)=c_3(1)+\sum_{k=1}^{n-1}c_2(k)$

$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k(k-1)}{2}+k+1\right)=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^2+k}{2}+1\right)$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+n-1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+n+1$$

$$={}_nC_3+{}_nC_2+{}_nC_1+{}_nC_0$$