2017학년도 수시모집 논술전형 논술고사 출제의도 및 예시답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	□	□	☑

출 제 의 도

[문항 1]

본 문항에서는 공간벡터의 내적과 두 벡터가 이루는 각을 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

1-1. 선분의 내분점을 지나는 벡터의 크기를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
1-2. 두 공간벡터의 내적과 두 공간벡터가 이루는 각을 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[문항 2]

본 문항에서는 일계도함수와 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프를 그리고 적분을 이용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

2-1. 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 그리고 곡선과 직선사이의 교점을 개수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
2-2. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[문항 3]

본 문항은 주어진 조건을 만족하는 확률 및 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

3-1. 확률의 덧셈정리를 활용하여 조건을 만족하는 확률을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
3-2. 조합을 뜻을 알고 조건을 만족하는 조합의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

문 항 해 설

[문항 1]

본 문항은 「기하와 벡터」의 '공간도형과 공간벡터' 단원에서 다루는 핵심 내용이다. 제시문을 이용하여 선분의 내분점과 외분점을 벡터로 표현할 수 있는지, 벡터의 내적을 이해하는지, 벡터의 내적을 이용하여 사이각의 삼각함수 값을 구할 수 있는지, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[문항 2]

미분법과 적분법은 자연과학 전반과 첨단과학은 물론 사회과학 분야에 이르기까지 매우 광범위하게 활용된다. 본 문항의 핵심적인 내용은 「미적분II」의 '미분법'과 '적분법', 그리고 「기하와 벡터」의 '평면곡선' 단원에서 다루어진다. 따라서 몫의 미분법, 음함수의 미분법, 도함수를 활용하여 평면에서 직선과 곡선 혹은 두 곡선의 교점의 개수를 조사할 수 있는지, 부정적분 공식과 정적분을 활용하여 주어진 영역의 넓이를 구할 수 있는지, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[문항 3]

확률 및 경우의 수 계산은 현실 생활에서 일어날 수 있는 여러 가지 불확실한 문제들을 예측하는 데 있어 비교적 합리적으로 활용되는 수학적 도구이다. 본 문항의 핵심적인 내용은 「확률과 통계」의 '순열과 조합'과 '확률' 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문에 근거하여 여러 가지 사건이 나올 수 있는 문제에서 각각의 사건이 일어날 수 있는 상황을 올바르게 이해하고 각 사건이 일어날 확률과 모든 경우의 수를 정확하게 계산할 수 있는지, 또한 계산 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지 평가한다.

예 시 답 안

[문항 1]

1-1.

$\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=t\,(0\le t\le 1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 가 된다.

이등변삼각형 OAB에서 $\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 α라고 하면, 덧셈정리에 의하여 $\cos\alpha=\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2})=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{9}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=9\cos\alpha=7$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=4t^2-4t+9$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{4t^2-4t+9}$ 이다.

1-2.

삼각형 OBC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{9}{2}$이다.

이등변삼각형 OAC에서 변 $\overline{\mathrm{OA}}$와 변 $\overline{\mathrm{OC}}$가 이루는 각의 크기를 β라고 하면 덧셈정리를 이용하여 $\cos\beta=\cos(\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{9}$ 이고

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=9\cos\beta=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1+\frac{7}{2}t$ 이므로 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\frac{2+7t}{6\sqrt{4t^2-4t+9}}$ 이 된다.

$$
\begin{aligned}
(\text{삼각형 OHC의 넓이}) &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}3\sqrt{4t^2-4t+9}\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{95t^2-172t+320}
\end{aligned}
$$

이 되고 $95t^2-172t+320=95(t-\frac{86}{95})^2+\frac{23004}{95}$이므로 삼각형 OHC의 넓이가 최소가 되는 t의 값은 $\frac{86}{95}$이다.

[문항 2]

2-1.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 $f'(x)$, $f''(x)$와 점근선을 이용하여 그린다. 점 $(-\frac{11}{2},0)$에서 그은 직선과 곡선 $y=f(x)$이 접하는 순간의 접점의 좌표를 $(t,\frac{1}{t^2-4})$라고 두고, 제시문 (가)를

이용하면 $-2t^2-11t=t^2-4$, 즉 $3t^2+11t-4=0$을 얻는다. 따라서 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=-4$이다. 그러면 $t=\frac{1}{3}$일 때 $m=-\frac{54}{1225}$이고, $t=-4$일 때 $m=\frac{1}{18}$이다. 따라서 정답은 아래와 같다.

① $m=0$ 일 때, 교점의 개수는 0개

② $-\frac{54}{1225}<m<\frac{1}{18}$ 이고 $m\neq 0$ 일 때, 교점의 개수는 1개

③ $m=-\frac{54}{1225}$ 혹은 $m=\frac{1}{18}$ 일 때, 교점의 개수는 2개

④ $m<-\frac{54}{1225}$ 또는 $m>\frac{1}{18}$일 때, 교점의 개수는 3개

2-2.

타원 $\frac{x^2}{4k}+\frac{y^2}{k}=1$과 곡선 $y=f(x)$의 교점이 4개인 경우는 두 곡선이 4개 중 2개의 교점에서 공통인 접선을 가질 때이다. 공통인 접선을 가지는 교점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t^2-4}\right)$라고 두자. 음함수 미분법에 의하여 타원 $\frac{x^2}{4k}+\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{x}{4y}$이다.

그러므로 제시문 (가)에 의하여 $(t^2-4)^3=8$, 즉, $t^2-4=2$를 얻는다. 따라서 $t=\pm\sqrt{6}$이다. 이 경우 $k=\frac{7}{4}$이다. 이 경우 타원 $x^2+4y^2=7$과 곡선 $y=f(x)$의 접점 이외의 두 교점의 x좌표는 $x=\pm\sqrt{3}$이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 주어진 영역의 넓이를 구하면 아래와 같다.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{\sqrt{7-x^2}}{2}\right)dx=\ln(2-\sqrt{3})+A$$

[문항 3]

3-1.

수식의 값이 7이 되기 위해서는 $+1$이 9회 -1이 2회 나와야 한다. $+1$이 나오는 경우는 $(+, 1)$ 또는 $(-, -1)$이 적힌 두 개의 공이 연이어 나올 때 이고 -1이 나오는 경우는 $(-, 1)$ 또는 $(+, -1)$이 적힌 두 개의 공이 연이어 나올 때 이다.

첫 번째 공이 1이 적힌 공이 나오고 $+1$이 8회 -1이 2회 나올 확률은

$$\frac{2}{3}\left(\sum_{i=0}^{8}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{8-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{2}\left(\frac{1}{12}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{2-j}\right)$$

제시문 (가)에 의해서 위 식은

$$\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^8\left(\frac{7}{12}\right)^2$$

이며 $+1$이 8회 -1이 2회 나올 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{10}C_2=45$이다.

첫 번째 공이 -1이 적힌 공이 나오고 $+1$이 9회 -1이 1회 나올 확률은

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{9-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{1}\left(\frac{1}{12}\right)^{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-j}\right)$$

제시문 (가)에 의해서 위 식은

$$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^{9}\left(\frac{7}{12}\right)$$

이며 $+1$이 9회 -1이 1회 나올 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{10}C_1 = 10$이다.

그러므로 수식의 값이 7이 될 확률은

$$45\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^{8}\left(\frac{7}{12}\right)^{2} + 10\frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^{9}\left(\frac{7}{12}\right)^{1} = \frac{595}{54}\left(\frac{5}{12}\right)^{8}$$

3-2.

최댓값을 갖기 위해서는 최대한 많이 $+1$이 연이어 나오거나 $-(-1)$이 연이어 나와야 한다. $m>9$이므로 $-$가 적힌 공의 수는 -1이 적힌 공의 수보다 항상 적다. 그러므로 $-(-1)$은 최대 $(19-m)$회 나오게 되며 -1적힌 공은 $(2m-19)$개가 남게 된다. 반면 $+$가 적힌 공의 수는 1이 적힌 공의 수보다 항상 많으므로 $+1$은 최대 $(21-m)$회 나온다. 따라서 최댓값은 $(19-m)+(21-m)-(2m-19) = 59-4m$

최댓값 $(59-4m)$을 갖는 경우의 수는 첫 번째 공의 결과에 따라 두 가지로 나누어진다. 첫 번째 공이 숫자 1이 적힌 공일 경우

	$+1$	$-(-1)$	$+(-1)$
횟수	$20-m$	$19-m$	$2m-19$

이를 나열하는 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{20}C_m \times {}_mC_{19-m}$

첫 번째 공이 숫자 -1이 적힌 공일 경우

	$+1$	$-(-1)$	$+(-1)$
횟수	$21-m$	$19-m$	$2m-20$

이를 나열하는 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{20}C_{m-1} \times {}_{m-1}C_{19-m}$

따라서 최댓값을 갖는 경우의 수는

${}_{20}C_m \times {}_mC_{19-m} + {}_{20}C_{m-1} \times {}_{m-1}C_{19-m}$