2016학년도 대학입학전형 대비 1차 모의논술고사
자연계 채점기준 및 모범답안

[문항 1]

문항 1-1. 제시문 [나]의 수학적 귀납법을 사용하여 수열의 일반항을 구하는 문제로, 수학적 귀납법을 정의대로 정확히 적용하는 능력을 평가하고, 수열의 일반항을 계산하는 데 필요한 기초적인 계산능력을 평가한다.

문항 1-2. 제시문 [나]에 주어진 방법대로 이미 수렴 또는 발산을 알고 있는 무한급수를 이용하여 주어진 무한급수의 수렴 또는 발산을 판정하고, 수렴하는 경우에 극한을 구하는 문제이다. 직접 극한을 구할 수 있으나, 제시문의 방법대로 잘 알고 있는 무한급수를 가져와서 적용하는 능력을 중요한 요소로 평가하는 문제이다.

문항 1 평가기준

문항	평가영역	평가내용	난이도	배점	출제영역	
					교과목	교과서 개념
1-1	적용력	수학적 귀납법의 적용능력	중하	15	수학	집합과 논리
1-2	적용력, 계산력	무한급수의 합 계산능력 주어진 지식의 활용능력	상	25	수학	수열과 급수

[문항 2]

문항 2-1. 크기가 4인 집합 X에서 X로의 함수 중에서 자신이 자신의 역함수가 되는 함수들의 수를 구하는 문제로 조합론적으로 경우의 수를 계산하는 능력을 평가한다.

문항 2-2. 크기가 6인 집합 X에서 X로의 함수 중에서 세 번 적용하면 항등함수가 되는 함수들의 수를 구하는 문제로 조합론적으로 경우의 수를 계산하는 능력을 평가한다.

문항 2-3. 크기가 8인 집합 X에서 X로의 함수 중에서 특정한 원소만 고정시키는 함수들의 수를 구하는 문제로 조합론적으로 경우의 수를 계산하는 능력을 평가한다.

문항 2 평가기준

문항	평가영역	평가내용	난이도	배점	출제영역	
					교과목	교과서 개념
2-1	계산력	함수, 순열과 조합의 계산능력	하	10	수학	함수, 순열과 조합
2-2	이해력, 계산력	함수, 순열과 조합의 이해력	중	10	수학	함수, 순열과 조합
2-1	이해력, 계산력, 창의력	함수, 순열과 조합의 이해력, 창의적인 기법	상하	10	수학	함수, 순열과 조합

[문항 3]

문항 3-1. 고정된 삼각형과 움직이는 삼각형의 넓이의 비가 2일 때의 시간을 구하는 문제로, 정사영의 넓이에 대한 이해와, 두 벡터의 사잇각 또는 두 평면의 이면각 내적을 이용하여 구하는 능력을 평가한다.

문항 3-2. 시간이 흐름에 따라 위의 두 삼각형의 사잇각이 변하여 취할 수 있는 범위를 구하는 문제로, 연속함수의 함숫값에 관한 개념을 평가한다.

문항 1-3. 정사영으로 얻은 삼각형의 한 강의 크기가 최대일 때의 시간을 구하는 문제로, 벡터의 사잇각에 대한 개념과 코사인 함수와의 관계에 대한 이해력와 적용력을 평가한다.

문항 3 평가기준

문항	평가영역	평가내용	난이도	배점	출제영역	
					교과목	교과서 개념
3-1	이해력, 적용력	도형과 벡터에 관한 이해력	중상	10	수학	벡터와 도형
3-2	이해력, 적용력	직선의 방정식, 벡터, 연속함수에 관한 이해력과 적용력	중	10	수학	벡터와 도형, 함수
3-3	이해력, 계산력	벡터의 사잇각, 함수의 최대·최소에 관한 이해력과 적용력	중상	10	수학	벡터와 도형, 함수

모범답안 및 세부 배점기준 (자연계)

【문항 1】

1-1. (15점) 일반항 a_n은 논제 1-1 에 의하여 $a_n = \dfrac{1+6+10+14+\cdots+(\text{제}n\text{항})}{(1+2+3+\cdots+n)^2}$ ......(*)

$2+6+10+\cdots+(4n-2)-1=2n^2-1$ 이고, (3점)

$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ 이므로 (3점)

일반항은 $a_n = \dfrac{4(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2}$ 이다. (2점)

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(2n^2-1)}{(n+1)^2} = 8$ 이므로 (5점)

무한수열 $\{n^2a_n\}$ 은 8에 수렴한다. (2점)

1-2. (25점) 제시문 [나]에서 이미 수렴함을 알고 있는 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 일반항으로

$b_n = \dfrac{8}{n(n+1)}$ 을 선택하면 (5점)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 8\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} 8\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 8\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 8\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 8 \text{ 이다.}$$
(5점)

한편 주어진 무한급수의 일반항은 $a_n = \dfrac{4(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2}$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$0 \le a_n = \frac{4(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2} \le \frac{8n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{8}{(n+1)^2} \le \frac{8}{n(n+1)} = b_n$$

이므로 제시문 [나]에 의하여 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. (5점)

<주의> 비교대상의 수렴하는 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 다양하게 나타날 수 있음.

이제 그 합을 구해보면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4(2k^2-1)}{\{k(k+1)\}^2}$ 이므로, 각 항을 부분분수로 고치기 위하여

$\dfrac{4(2k^2-1)}{\{k(k+1)\}^2} = 4\left\{\dfrac{ak+b}{k^2}-\dfrac{ck+d}{(k+1)^2}\right\}$ 라 두고 a, b, c, d를 구하면 $a=2,\ b=-1,\ c=2,\ d=1$ 이다.

(4점)

따라서 무한급수의 부분합은

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{4(2k^2-1)}{\{k(k+1)\}^2} = \sum_{k=1}^{n}4\left\{\frac{2k-1}{k^2}-\frac{2k+1}{(k+1)^2}\right\} = 4\left\{1-\frac{2n+1}{(n+1)^2}\right\} = \left\{\frac{2n}{(n+1)}\right\}^2$$

이고, 무한급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n}{(n+1)}\right\}^2 = 4 \text{ 이다.}$$
(6점)

【문항 2】

2-1. (10점) 합성함수 $(f \circ f)(x) = x$ 인 경우는

(ⅰ) 항등함수 1개, (2점)

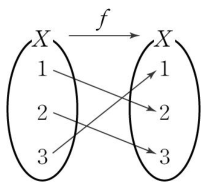
(ⅱ) 어느 한 쌍의 두 수가 서로 다른 수에 대응하는 경우 ${}_4C_2$개, (3점)

(ⅲ) (ⅱ)이 두 쌍인 경우 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{2!}$로 나누어진다. (4점)

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $1 + {}_4C_2 + {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{2!}$ = 1 + 6 + 3 = 10(개)이다. (1점)

2-2. (10점) $I(f)$가 공집합이므로 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

그리고 $(f \circ f \circ f)(x) = x$를 만족해야 f는 일대일 대응이고 6개의 수가 세수씩 두 조로 편성하여 각조는 예를 들어

[예] 

와 같이 대응되어야 한다. (5점)

6개의 수를 세수씩 두 조로 편성하는 방법의 수 ${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \dfrac{1}{2!}$ (2점)

각 조에서 [예]의 1이 3에 대응되는 경우로 나누어 곱의 법칙을 적용하면, 전체 경우의 수는

${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \dfrac{1}{2!} \times 2^2$ = 40(개)이다. (3점)

2-3. (10점) X가 n개의 원소를 가질 때, 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x) \neq x$인 함수의 개수를 a_n 이라고 하자.

$a_1 = 0$ (∵ 원소가 1개일 때는 없다.)

$a_2 = 1$ (∵ 원소가 2개일 때는 서로 다른 수에 대응.)

$a_3 = 2$ (∵ 원소가 3개일 때는 2가지 경우이다.) (3점)

$a_4 = 3(a_2 + a_3)$= 9 (3점)

(∵) 1과 $2 \leq k \leq 4$인 수 k를 잡고 점화식을 구하면

ⅰ) 1에 k, k에 1이 대응할 때: 남은 2개를 대응하는 것으로 a_2

ⅱ) 1에 k, k에 1이 아닐 때: 1자리를 제외한 3개를 대응하는 것으로 a_3

따라서 4개를 완전순열로 대응하는 가짓수는 3개의 k에 대해 $a_4 = 3(a_2 + a_3)$이다.

같은 방법으로, $a_5 = 4(a_3 + a_4)$이고, (3점)

따라서 $a_5 = 4(2 + 9)$ = 44(개)이다. (1점)

【문항 3】

3-1. (10점) 고정된 시간 t에 대하여 $A=P_t-O_t$, $B=Q_t-O_t$, $a=\|A\|$, $b=\|B\|$라 하자.

벡터 A, B의 사이각을 θ라 하고 $\triangle O_t P_t Q_t$의 넓이를 S_t라 하면

$$\begin{aligned} S_t &= \triangle O_t P_t Q_t \text{의 넓이} = \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-(A\bullet B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4+1+4t^2)(1+4+9t^2)-(4+6t^2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{9+17t^2} \end{aligned}$$

이다. (5점)

$\triangle OPQ$의 넓이는 $\frac{3}{2}$이므로 $\triangle O_t P_t Q_t$의 넓이가 $\triangle OPQ$의 넓이의 2배가 될 때

$2=\frac{S_t}{S_0}=\frac{\sqrt{9+17t^2}}{3}$ 가 성립한다. 따라서 $t=\frac{3\sqrt{51}}{17}$이다. (5점)

다른풀이) 세 점 O_t, P_t, Q_t을 지나는 평면 π_t의 방정식을 $\pi_t : ax+by+cz+d=0$ 라 하고,

세 점의 좌표를 대입하여 풀면, $\pi_t : tx+4ty-3z+3t=0$ 을 얻는다.

평면 π_t의 법선벡터는 $\vec{u}=(t,4t,-3)$이고 xy 평면의 법선벡터는 $\vec{v}=(0,0,1)$이다.

$\triangle O_t P_t Q_t$의 넓이가 넓이가 두배일 때, 두 평면의 이면각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{\triangle OPQ\text{의 넓이}}{\triangle O_t P_t Q_t\text{의 넓이}}=\frac{1}{2}$

이다. 한편 $\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}=\frac{|t\times0+4t\times0+(-3)\times1|}{\sqrt{t^2+(4t)^2+(-3)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{17t^2+9}}$ 이다.

따라서, $\frac{3}{\sqrt{17t^2+9}}=\frac{1}{2}$ 이 성립하고 $t=\frac{3\sqrt{51}}{17}$이다.

3-2. (10점) 세 점 O_t, P_t, Q_t을 지나는 평면 π_t의 방정식은 $\pi_t : ax+by+cz+d=0$ 에 좌표를 대입하여 풀면

$\pi_t : tx+4ty-3z+3t=0$ 이다. (3점)

평면 π_t의 법선벡터는 $\vec{u}=(t,4t,-3)$이고 xy 평면의 법선벡터는 $\vec{v}=(0,0,1)$이다. (1점)

두 평면의 이면각을 $\lambda(t)$라 하면

$\cos\lambda(t)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}=\frac{|t\times0+4t\times0+(-3)\times1|}{\sqrt{t^2+(4t)^2+(-3)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{17t^2+9}}$ 이다. (3점)

$\cos\lambda(t)=\frac{3}{\sqrt{17t^2+9}}$에서 t가 무한히 커지면 $\frac{3}{\sqrt{17t^2+9}}$의 값은 0으로 수렴하므로

중간값의 정리에 의하여 $\cos\lambda(t)$는 $(0,\lambda(0)]=(0,1]$의 값을 모두 갖는다. (2점)

그러므로 $\lambda(t)$가 가질 수 있는 값의 범위는 $[0,\infty)$이다. (1점)

3-3. (10점) $\angle P_t' O_t' Q_t'$ 의 크기 $\theta(t)$에 대하여

$$\cos\theta(t)=\frac{\left|\overrightarrow{O_t'P_t'}\cdot\overrightarrow{O_t'Q_t'}\right|}{\|\overrightarrow{O_t'P_t'}\|\ \|\overrightarrow{O_t'Q_t'}\|}=\frac{(0,1,2t)\cdot(0,2,3t)}{\|(0,1,2t)\|\ \|(0,2,3t)\|}=\frac{2+6t^2}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{4+9t^2}} \quad (4점)$$

이다. $f(t)=\cos\theta(t)=\frac{2+6t^2}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{4+9t^2}}$라 두면, $f(t)$가 최소일 때 $\theta(t)$가 최대이다. (1점)

$f'(t)=\frac{2t\sqrt{3t^2-1}}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}}$ = 0 이면 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, 따라서 $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 극소값을 가진다.

(2점)

한편 $f(0)=1$이고, t가 한없이 커지면 $f(t)$는 1에 수렴하므로, $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 최소값을 가진다.

그러므로 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, $\theta(t)$의 값이 최대이다. (3점)