2016학년도 대학입학전형 자연계 모의평가 문제지

감독관확인
㊞

지원학과(학부)		응시번호		성명	

【유의사항】

1. 시험시간은 100분입니다.
2. 답안은 답안지의 해당 문항 번호에 연필 또는 샤프로 작성하시오.
3. 답안 수정 시 지우개를 사용하시오.
4. 문항 번호를 기술하고, 답을 작성하시오.
5. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 마시오.
6. 답안 연습은 연습지를 활용하시오.
7. 답안지, 연습지 및 문제지에 필요한 인적사항을 기입하였는지 확인하시오.

【 문항 1 】다음 제시문을 근거로 하여 논제에 답하시오. (40점)

[가] 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 부분합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

로 이루어진 무한수열 $\{S_n\}$이 실수 S에 수렴하면, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다.

이 때, S를 이 무한급수의 합이라 하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 로 나타낸다. 한편, 수열 $\{S_n\}$이 발산하면

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산한다고 하며, 발산하는 무한급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않는다.

[나] 무한급수에서 합을 직접 구하지 않고 알려진 무한급수와 비교하여, 수렴과 발산을 간접적으로 판정할 수 있는 다음의 성질이 잘 알려져 있다.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 발산한다.

1-1. 무한수열 $\{c_n\}$이 $c_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 4n-2 & (n \ge 2) \end{cases}$ 으로 주어질 때, 무한수열

$$\frac{c_1}{1^2},\ \frac{c_1+c_2}{(1+2)^2},\ \frac{c_1+c_2+c_3}{(1+2+3)^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{c_1+c_2+c_3+\ \cdots\ +c_n}{(1+2+3+\ \cdots\ +n)^2},\ \cdots\cdots$$

의 일반항 a_n을 구하고, 무한수열 $\{n^2 a_n\}$의 수렴, 발산을 판정하시오. **(15점)**

1-2. 1-1에서 주어진 무한수열 $\{c_n\}$에 대하여, 1-1의 결과와 제시문 [나]를 이용하여 무한급수

$$\frac{c_1}{1^2} + \frac{c_1+c_2}{(1+2)^2} + \frac{c_1+c_2+c_3}{(1+2+3)^2} + \cdots\cdots + \frac{c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n}{(1+2+3+\cdots+n)^2} + \cdots\cdots$$

의 수렴, 발산을 판정하고, 수렴하는 경우에 이 무한급수의 합을 구하시오. **(25점)**

(뒷면에 계속)

【 문항 2 】 다음 제시문을 근거로 하여 논제에 답하시오. (30점)

[가] 함수 $f: X \to Y$가 정의 되어 있을 때, 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$일 때 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립하면, f를 **일대일함수**라고 한다.

[나] 함수 $f: X \to Y$가 일대일함수이고, 치역과 공역이 같으면 f를 **일대일대응**이라고 한다.

[다] 두 함수 $f: X \to Y$ 와 $g: Y \to Z$ 가 주어졌을 때, 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시켜서 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 f와 g의 **합성함수**라고 하며, 이것을 기호로 $g \circ f$ 로 나타낸다.

함수 $f: X \to X$ 에 대하여 $I(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ 로 정의하자.

2-1. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서의 함수 $f: X \to X$ 가운데서, 정의역의 모든 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$가 성립하는 함수 f 의 개수를 구하시오. **(10점)**

2-2. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서의 함수 $f: X \to X$ 가운데서, $I(f)$가 공집합이고 $I(f \circ f \circ f) = X$가 성립하는 함수 f 의 개수를 구하시오. **(10점)**

2-3. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에서의 일대일대응 $f: X \to X$ 가운데서, $I(f) = \{6, 7, 8\}$가 성립하는 함수 f 의 개수를 구하시오. **(10점)**

【 문항 3 】 다음 제시문을 근거로 하여 논제에 답하시오. (30점)

좌표공간의 xy 평면에서 세 점이 각각 $O(0,0,0)$, $P(2,1,0)$, $Q(1,2,0)$ 에 놓여 있다.
시간이 0일 때 점들이 움직이기 시작하여, 시간이 t일 때의 위치는 각각 $O_t(0,0,t)$, $P_t(2,1,3t)$, $Q_t(1,2,4t)$ 라고 한다. 이 때, 삼각형 $\triangle O_tP_tQ_t$의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 $\triangle OPQ$이며, yz평면 위로의 정사영은 $O_t'(0,0,t)$, $P_t'(0,1,3t)$, $Q_t'(0,2,4t)$ 를 세 꼭지점으로 하는 삼각형 $\triangle O_t'P_t'Q_t'$ 이다.

3-1. 삼각형 $\triangle O_tP_tQ_t$의 넓이가 삼각형 $\triangle OPQ$의 넓이의 2배일 때의 시간 t를 구하시오. (10점)

3-2. 삼각형 $\triangle O_tP_tQ_t$를 포함하는 평면과 xy평면과의 사이각의 크기를 $\lambda(t)$라 하자. 시간 t가 구간 $[0, \infty)$위에서 변할 때, $\lambda(t)$의 범위를 구하시오. (10점)

3-3. 시각 t일 때 각 $\angle P_t'O_t'Q_t'$의 크기를 $\theta(t)$라 하자. $\theta(t)$의 값이 최대일 때의 시간 t를 구하시오. (10점)

*** 주의사항 : 문제지, 연습지, 답안지에 필요한 인적사항을 기입하였는지 확인하시오.**