# 2016학년도 대학입학전형 대비 1차 모의논술고사
# 의학계 채점기준 및 모범답안

## [문항 1]

문항 1-1. 제시문 [나]의 수학적 귀납법을 사용하여 수열의 일반항을 구하는 문제로, 수학적 귀납법을 정의대로 정확히 적용하는 능력을 평가하고, 수열의 일반항을 계산하는 데 필요한 기초적인 계산능력을 평가한다.

문항 1-2. 무한수열의 일반항을 구하는 문제로, 구하는 방법에 대한 이해와 계산능력을 평가한다.

문항 1-3. 제시문 [다]에 주어진 방법대로 이미 수렴 또는 발산을 알고 있는 무한급수를 이용하여 주어진 무한급수의 수렴 또는 발산을 판정하고, 수렴하는 경우에 극한을 구하는 문제이다. 직접 극한을 구할 수 있으나, 제시문의 방법대로 잘 알고 있는 무한급수를 가져와서 적용하는 능력을 중요한 요소로 평가하는 문제이다.

### 문항 1 평가기준

| 문항 | 평가영역 | 평가내용 | 난이도 | 배점 | 출제영역 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 교과목 | 교과서 개념 |
| 1-1 | 적용력 | 수학적 귀납법의 적용능력 | 중하 | 10 | 수학 | 집합과 논리 |
| 1-2 | 계산력 | 수열의 극한에 관한 이해력 | 하 | 5 | 수학 | 수열과 급수 |
| 1-2 | 적용력, 계산력 | 무한급수의 합 계산능력<br>주어진 지식의 활용능력 | 상하 | 15 | 수학 | 수열과 급수 |

## [문항 2]

문항 2-1. 삼각형의 내심의 좌표를 구하는 문제로, 내접원의 반지름을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 법과 직선과 점 사이의 거리를 구하는 법에 관한 지식을 판단하고 이를 적용하는 능력을 평가한다.

문항 2-2. 내접원의 넓이가 최대가 될 때의 삼각형의 모양을 구하는 문제로, 내접원의 반지름이 최대일 때의 문제로 바꾸어 생각하는 능력을 판단하고, 함수의 미분에 의한 극점을 찾는 방법으로 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

### 문항 2 평가기준

| 문항 | 평가영역 | 평가내용 | 난이도 | 배점 | 출제영역 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 교과목 | 교과서 개념 |
| 2-1 | 이해력, 적용력 | 도형과 벡터에 관한 이해력 | 중 | 15 | 수학 | 도형, 벡터 |
| 2-2 | 창의력, 이해력, 적용력 | 도형, 함수의 최대·최소에 관한 이해력과 창의적인 기법 | 상 | 15 | 수학 | 도형, 벡터, 함수 |

**[문항 3]**

문항 3-1. 행렬의 곱에 대하여 닫혀 있는 유한집합에 들어갈 수 있는 행렬의 행렬식의 값을 구하는 문제로, 집합과 연산에 관한 정확한 개념을 가지고 조건에 합당한 행렬의 성질들을 찾아내는 능력을 평가한다.

문항 3-2. 위에서 찾은 값을 가지는 행렬식을 찾아내는 문제로, 원소에 관한 기술로 주어지는 집합의 원소에 관한 정확한 이해력을 바탕으로 행렬식의 값으로부터 얻어지는 성질을 이용하는 능력을 살펴보고, 그 과정에서 필요한 부등식의 계산능력도 평가한다.

문항 1-3. 3-2에서 구한 행렬들을 원소로 가지는 집합 가운데서 닫혀있는 집합을 찾는 문제로, 다양한 창의적인 기법을 평가한다.

## 문항 3 평가기준

| 문항 | 평가영역 | 평가내용 | 난이도 | 배점 | 출제영역 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 교과목 | 교과서 개념 |
| 3-1 | 이해력, 적용력 | 집합과 연산, 행렬계산능력 | 상하 | 15 | 수학 | 집합, 행렬 |
| 3-2 | 적용력, 계산력 | 부등식계산 및 적용능력 | 중 | 10 | 수학 | 행렬, 부등식 |
| 3-3 | 창의력, 이해력 | 집합과 정확한 이해력과 적용력<br>집합의 창의적인 조작능력 | 상 | 15 | 수학 | 집합, 행렬 |

# 모범답안 및 세부 채점기준 (의학계)

**【문항 1】**

1-1. (10점) $a_n = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ 이므로 $\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ 임을 제시문 [나]의 수학적 귀납법을 이용하여 밝히면 된다.

i) $n=1$ 일 때, 분명히 (좌변)= 1 =(우변) 으로 성립한다 (2점)

ii) $n=k$ 일 때, 성립한다고 가정하면 (2점)

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2 + 4(k+1)\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)\right\}^2 = a_{n+1}$$ 이므로 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

(4점)

제시문 [나]의 수학적귀납법에 의하여 $a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$ 가 성립한다.

(2점)

1-2. (5점) 일반항 $b_n$은 1-1 에 의하여 $b_n = \dfrac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3} = \dfrac{1+6+10+14+\cdots+(\text{제}n\text{항})}{(1+2+3+\cdots+n)^2}$ 이다.

$1+6+10+\cdots+(4n-2) = 2+6+10+\cdots+(4n-2)-1 = 2n^2 - 1$ 이고 (1점)

$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \frac{1}{4}n(n+1)^2$ 이므로 $b_n = \dfrac{4(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2}$ 이다. (1점)

그러므로

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4(2n^2-1)}{(n+1)^2}$ = 8 이고, (2점)

$\{n^2 b_n\}$ 은 8에 수렴한다. (1점)

1-3. (15점) 제시문 [나]에서 이미 수렴함을 알고 있는 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 일반항으로

$b_n = \dfrac{8}{n(n+1)}$ 을 선택하면 (3점)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 8\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} 8\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 8$$ 이다. (3점)

한편 주어진 무한급수의 일반항은 $a_n = \dfrac{4(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2}$ 이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$0 \le a_n = \frac{4(2n^2-1)}{\{n(n+1)\}^2} \le \frac{8n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{8}{(n+1)^2} \le \frac{8}{n(n+1)} = b_n$$

이므로 제시문 [다]에 의하여 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. (4점)

<주의> 비교대상의 수렴하는 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 다양하게 나타날 수 있음.

이제 그 합을 구해보면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4(2k^2-1)}{\{k(k+1)\}^2}$ 이므로, 각 항을 부분분수로 고치기 위하여

$\dfrac{4(2k^2-1)}{\{k(k+1)\}^2} = 4\left\{\dfrac{ak+b}{k^2} - \dfrac{ck+d}{(k+1)^2}\right\}$ 라 두고 $a, b, c, d$를 구하면 $a=2,\ b=-1,\ c=2,\ d=1$ 이다.

따라서 무한급수의 부분합은

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4(2k^2-1)}{\{k(k+1)\}^2} = \sum_{k=1}^{n} 4\left\{\frac{2k-1}{k^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2}\right\} = 4\left\{1 - \frac{2n+1}{(n+1)^2}\right\} = \left\{\frac{2n}{(n+1)}\right\}^2$$

이고, 무한급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n}{(n+1)}\right\}^2 = 4 \text{ 이다.}$$ (5점)

【문항 2】

2-1. (15점) $\triangle ABC$의 넓이를 $S$라 하면, $S = \frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{CH}$이고, 또 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 이므로

$S = \frac{1}{2}(p+2p)q = \frac{1}{2}r(a+b+c)$, 즉 $\frac{3}{2}pq = \frac{3}{2}r$ 이 성립한다. 따라서, $r = pq$ 이다. (5점)

편의상 $H$의 좌표를 $(0,0)$이라 두면 점$A, C, O$의 좌표는 각각 $(-p,0)$, $(0,q)$, $(d,r)$ 이다.

그러면 직선 $\overleftrightarrow{AC}$ 의 방정식은 $y = \frac{q}{p}x + q$이므로 $qx - py + pq = 0$ 가 성립한다.

점 $O(d,r)$와 이 직선 사이의 거리는 공식에 의하여 $r = \frac{qd - pr + pq}{\sqrt{p^2+q^2}}$ 이다 (6점)

(※ 점 $O(d,r)$는 이 직선의 아래에 있으므로 $r < \frac{q}{p}d + q$ 이다. 즉 $qd - pr + pq > 0$ 이다).

그러므로 $d = \frac{r\sqrt{p^2+q^2} + pr - pq}{q} \equiv \frac{pq\sqrt{p^2+q^2} + p^2q - pq}{q} = p(p + \sqrt{p^2+q^2} - 1)$ 이다. (4점)

(다른 풀이) 점$O$와 직선 $\overleftrightarrow{BC}$ 사이의 거리가 $r$이라는 사실로부터 위와 같은 과정을 거쳐

$d = (2 - 2p - \sqrt{4p^2+q})$을 구할 수도 있다.

($r = pq$ 이므로 $d = p(p + \sqrt{p^2+q^2} - 1) = p(2 - 2p - \sqrt{4p^2+q})$ 이다.)

2-2. (15점) 내접하는 원의 넓이 $\pi r^2$가 최대가 되는 경우는 $r$이 최대가 될 때이다. $m = \frac{q}{p}$이라 두자.

조건 $3 = a+b+c$에 의하여 $3 = 3p + \sqrt{p^2+q^2} + \sqrt{4p^2+q^2}$ 이다. 따라서

$$\frac{3}{p} = 3 + \sqrt{1 + (\frac{q}{p})^2} + \sqrt{4 + (\frac{q}{p})^2} = 3 + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{4+m^2},$$

즉, $p = \frac{3}{3 + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{4+m^2}}$ 이다.

따라서, $r = pq = p^2\frac{q}{p} = m\left(\frac{3}{3+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{4+m^2}}\right)^2$ 이다. (5점)

$r$이 최대가 되려면 $\sqrt{r}$이 최대가 되어야 한다. $m$은 양수이므로 편의상 $m = t^2$이라 두면

$\sqrt{r} = \frac{3t}{3+\sqrt{1+t^4}+\sqrt{4+t^4}}$ 이다. 함수 $f(t) = \frac{t}{3+\sqrt{1+t^4}+\sqrt{4+t^4}}$ 라 두고 증가, 감소를 살피자.

함수 $f(t)$를 미분하면

$$f'(t) = \frac{1(3+\sqrt{1+t^4}+\sqrt{4+t^4}) - t\left(0 + \frac{4t^3}{2\sqrt{1+t^4}} + \frac{4t^3}{2\sqrt{4+t^4}}\right)}{(3+\sqrt{1+t^4}+\sqrt{4+t^4})^2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{1+t^4} - \frac{2t^4}{\sqrt{1+t^4}} + \sqrt{4+t^4} - \frac{2t^4}{\sqrt{4+t^4}}}{(3+\sqrt{1+t^4}+\sqrt{4+t^4})^2} = \frac{3 + \frac{1-t^4}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{4-t^4}{\sqrt{4+t^4}}}{(3+\sqrt{1+t^4}+\sqrt{4+t^4})^2}$$

그러므로 $0 < t < 1$에서 함수 $f'(t) > 0$ 이고 따라서 $f(t)$ 는 증가함수이다.

따라서 $0 < t < 1$이면 $f(t) < f(1)$이다. (6점)

또한, $f'(1) \neq 0$이므로 함수 $t = 1$은 $f(t)$의 극대점이 아니다. 그러므로, 그러므로 $t \leq 1$ 이면 극대점이 아니다.

따라서, $m = \frac{q}{p} \leq 1$ 일 때, $f(t)$는 최대값을 가지지 않는다.

따라서, 이 경우에 내접원의 반지름이나 내접원의 넓이는

최대가 아니다. 그러므로, 내접하는 원의 넓이가 최대이면 $m > 1$, 즉 $q > p$이다. (4점)

【문항 3】

3-1. (15점) $S$를 유한닫힌집합이라 하자. $A \in S$이면 조건 (1)에 의하여 $A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots \in S$이다.

$|A^n| = |A|^n$ 이고 $S$ 가 유한집합이므로 $\{\, |A|, |A|^2, |A|^3, |A|^4, \ldots \}$ 는 정수들의 유한집합이다. (6점)

그러므로 $|A| \in \{0, 1, -1\}$ 이다. (2점)

그리고 $A \in S \subseteq M$ 이므로 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$라고 나타낼 수 있다. (1점)

그런데, $|A| = a^2 - ab + b^2 = (a - \dfrac{b}{2})^2 + \dfrac{3}{4}b^2 \geq 0$ 이므로 $|A| \in \{0, 1\}$ 이다. (4점)

역으로 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$는 (1)와 (2)를 만족하는 $M$의 부분집합이므로 답은 $\{0, 1\}$ 이다. (2점)

3-2. (10점) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ 모양의 행렬로서 $|A| = a^2 - ab + b^2 \in \{0, 1\}$ 인 행렬에 대해서

$0 \leq \dfrac{3}{4}a^2 \leq (b - \dfrac{a}{2})^2 + \dfrac{3}{4}a^2 = a^2 - ab + b^2$ 과 $0 \leq \dfrac{3}{4}b^2 \leq (a - \dfrac{b}{2})^2 + \dfrac{3}{4}b^2 = a^2 - ab + b^2$ (3점)

을 성립시키는 $(a, b)$는 $\{(0,0), (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (1,1), (-1,-1)\}$ 의 원소 중의 하나이다. (2점)

그러므로 $A$는 $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$의 원소 중의 하나이다 (1점)

그런데, $O$는 영행렬, $I$는 단위행렬, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 이라고 하면, $W = \{O, I, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ 가 된다.

$X^6 = I$ 이므로 $W$ 는 유한닫힌집합이다. (3점)

따라서, $W$ 의 각 원소는 유한닫힌집합의 원소이다. (1점)

3-3. (15점) $X$에 대하여 $X^3 = -I,\ X^4 = -X^2, X^5 = -X, X^6 = I$ 가 성립한다. (4점)

$S$를 임의의 유한닫힌집합이라고 하면, 2-2에 의하여 $S \subseteq W$ 이다. 따라서, 아래의 사실을 알 수 있다.

(1) $I \in S$ ($\because$ $X^k \in S$ 이면, $I = I^k = (X^6)^k = (X^k)^6 \in S$.)

(2) $\{I\}, \{I, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$는 조건 (가)와 (나)를 만족한다. ($\because$ $X^6 = I$)

(3) $X \in S$ 혹은 $X^5 \in S$이면 $S = \{I, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$. ($\because (X^5)^5 = X$)

(4) $X^2, X^3 \in S$ 혹은 $X^4, X^3 \in S$이면 $S = \{I, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$. ($\because X^2X^3 = X^5$, $X^4X^3 = X$) (5점)

따라서, $O$를 포함하지 않는 유한부분집합은 $\{I\}, \{I, X^3\}, \{I, X^2, X^4\}, \{I, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ 이다. (4점)

이로부터, $O$를 포함하는 유한부분집합은 $\{O\}, \{O, I\}, \{O, I, X^3\}, \{O, I, X^2, X^4\}, \{O, I, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ 이다.

그러므로, 유한부분집합은 위의 9개 뿐이다. (2점)