2016학년도 수시모집 논술전형 논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	□	☑	□

1. 출제의도 및 문제해설

[출제의도]

2016학년도 수시모집 자연계 논술전형 문항은 수학적 기초지식, 문제해결 능력, 계산능력을 측정할 뿐만 아니라, 개념의 확실한 이해정도를 평가하고 새로운 문제에 대하여도 개념과 지식을 확대 적용하여 응용하는 능력을 측정하고, 또한 이 과정에서 제시된 조건들로부터 논리적인 분석 및 추론을 통하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 통합적 사고능력을 평가하고자 하였다.

[문제해설]

본 문항은 고등학교 교육과정의 내분점의 정의, 수열, 미분, 삼각함수, 수열의 극한, 함수의 극한, 공간좌표, 벡터의 내적 등에 관한 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.

[문항 1]

본 문항은 고등학교 교육과정의 내분점의 정의, 함수의 극한, 미분 등에 관한 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.

[1-1]

제시문(나)에 기술된 좌표평면 위의 두 점을 잇는 선분의 내분점의 좌표를 이용하여 아래로 볼록한 함수의 그래프의 개념을 설명하는 제시문(가)를 부등식으로 구체적이고 엄밀하게 표현할 수 있는지를 평가한다.

[1-2]

아래로 볼록한 함수가 만족시키는 문제 1-1의 부등식과 세 점 사이의 평균변화율의 관계, 그리고 제시문(다)로부터 도출되는 부등식을 논리적으로 증명해내는 능력을 평가한다. 이 부등식으로부터 미분가능하고 아래로 볼록한 함수의 최솟값을 구하는 하나의 방법으로 제시될 수 있다.

[문항 2]

본 문항은 고등학교 교육과정중 수열과 점화관계에 대한 문항이며, 그 중 패턴이나 규칙성의 개념을 자연 현상에 적용하는 모델링을 제시하고, 주어진 모델에서 나타나는 패턴이나 규칙성을 타당하게 추론하여 그 결과를 귀납적으로 표현할 수 있는 능력을 알아보고자 하였다.

[2-1]

제시문에서 주어진 모델에서 나타나는 규칙성을 타당하게 추론하고, 구체적으로 주어진 항에 대한 값을 규칙성을 반복 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[2-2]
문항 [2-1]에서 추론한 규칙성을 이용하여 규칙성에서 나타난 2개의 수열 사이의 관계를 이해하고, 두 수열의 관계를 표현할 수 있는지를 평가한다.

[문항 3]
본 문항은 고등학교 교육과정의 공간좌표, 벡터의 내적, 삼각함수 등에 관한 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.
[3-1]
공간좌표에 대한 이해를 바탕으로 제시문 (나)에서 제시한 구 위의 두 점 사이의 사이각의 정의를 이해하고 문제에서 제시한 상황에 맞는 점을 구할 수 있는 능력을 평가한다.
[3-2]
본 문항에서는 좌표축을 중심으로 회전하는 운동의 매개변수 방정식을 구하고 제시문 (가)에서 제시한 내적의 정의로부터 사이각의 기하학적 의미를 파악하고 그 크기를 구하는 방법을 이해하고, 삼각함수 방정식을 풀이하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

2. 종합평가기준

문항	문항정보 필수항목					
	교과 목명	**평가 영역**	**평가내용**	**적용교육과정**	**난이도**	**배점**
1-1	수학II	도함수의 활용	볼록함수의 성질을 증명하기	07개정 교육과정	하	10
	수학	직선의 내분점				
1-2	수학II	도함수의 활용	볼록함수의 성질을 증명하기	07개정 교육과정	중	20
2-1	수학I	수열	규칙성을 이용한 수열의 항 계산하기	07개정 교육과정	중	15
2-2	수학I	수열	규칙성을 이용한 수열의 점화관계 추론하기	07개정 교육과정	중	20
3-1	기하와 벡터	벡터	제시문을 이용하여 구면상의 좌표를 구하기	07개정 교육과정	하	10
3-2	기하와 벡터	벡터	벡터의 내적을 이용하여 조건에 따른 코사인 값 계산하기	07개정 교육과정	상	25

모 범 답 안

【문항 1】

1-1.

(i) $t=0,1$ 일 때, $f(p) \le f(p)$, $f(q) \le f(q)$이므로 성립한다.

(ii) $0<t<1$ 일 때, 편의상 임의의 두 점 p, q 가 $p<q$ 라고 하자.
제시문(나) (좌표평면에서의 내분점의 관계)에 의하여 좌표평면 위의 두 점 $(p, f(p))$, $(q, f(q))$를 잇는 선분을 $t:1-t$ 로 내분하는 점의 좌표는 $((1-t)p+tq,\ (1-t)f(p)+tf(q))$ 이다.
따라서 **제시문(가) (또는 아래로 볼록하다는 정의 또는 개념)**에 의하여

$$f((1-t)p+tq) \le (1-t)f(p)+tf(q)$$

가 성립한다.

1-2.

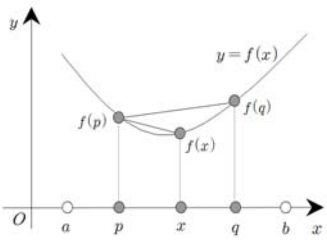
p, q가 임의의 두 점이므로 $p<q$라고 가정하자. 그리고 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ 라 하자.

먼저 $x \ne p$인 임의의 $x \in (a, q)$에 대하여

$$g(x)=\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \le \frac{f(q)-f(p)}{q-p} \qquad \text{(식1)}$$

임을 보이자.

(i) $p<x<q$ 일 때, $g(x) \le \dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 가 성립함을 보이자.



$t=\dfrac{x-p}{q-p}$ 라 하면 $0<t=\dfrac{x-p}{q-p}<1$, $0<1-\dfrac{x-p}{q-p}<1$

이고 **문제1.1**의 부등식에 의하여

$$f(x) \le \left(1-\frac{x-p}{q-p}\right)f(p)+\left(\frac{x-p}{q-p}\right)f(q)=f(p)+(x-p)\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$

이다. 따라서 $x-p>0$ 이므로 $g(x) \le \dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 이다.

(ii) $a<x<p$ 일 때, $g(x) \le \dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 또한 성립함을 보이자.

$x<p<q$에 대하여 $t=\dfrac{p-x}{q-x}$ 라 하면 $0<t<1$이고 (i)과 같은 계산과정을 반복하면,

$\dfrac{f(p)-f(x)}{p-x} \le \dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 이 성립되어 $g(x) \le \dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 이다.

(i) (ii)에 의해 (식1)이 성립한다.

함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능함으로 **제시문(다)**와 (식1)에 의하여 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to p} g(x) = f'(p) \le \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 이다.

그러므로 $f(q) \ge f(p)+f'(p)(q-p)$ 가 성립한다.

【문항 2】

2-1.

$A_1 = 1$ 이고, [n 단계]의 세포 ⓐ가 [규칙 1]에 의하여

[$n+1$ 단계]에서 그 개수가 3배로 분열되므로 $A_n = 3^{n-1}$ 이다.

또, B_{n+1} 을 구하기 위해

[$n+1$ 단계]에서의

① 세포 $\boxed{b}$ 는

[n 단계]에서의 ⓐ 가 성장하여 새롭게 나타나는 $\boxed{b}$ 와 ………… ⓘ

$\boxed{c}$ 가 성장하여 새롭게 나타나는 $\boxed{b}$ …………… ⓘⓘ

② 세포 $\boxed{c}$ 는

[n 단계]에서의 $\boxed{b}$ 가 바뀌어 나타나는 $\boxed{c}$ ………………………… ⓘⓘⓘ

③ 세포 $\boxed{d}$ 는

[n 단계]에서의 $\boxed{c}$ 가 성장하여 새롭게 나타나는 $\boxed{d}$ 와 ………… ⓘⓥ

$\boxed{d}$ 가 바뀌지 않고 그대로 있는 $\boxed{d}$ ……………… ⓥ

이므로 $B_{n+1} =$ ⓘ+ⓘⓘ+ⓘⓘⓘ+ⓘⓥ+ⓥ 이다.

ⓘ $= 2A_n$, ⓘⓘⓘ+ⓘⓥ+ⓥ $= B_n$ 이고, ⓘⓘ $=$ [$n-1$ 단계]에서의 $\boxed{b}$ 의 개수 $= B_{n-1} - B_{n-2}$ 이므로

$$B_{n+1} = B_n + 2A_n + B_{n-1} - B_{n-2}\ (n \geq 3) \ \cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

임을 알 수 있다.

따라서 $B_1 = 0, B_2 = 2, B_3 = 8$ 을 식 (*)에 차례로 적용하여 구하면

$B_6 = 270$ 이다.

2-2.

$2A_n = B_{n+1} - B_n - B_{n-1} + B_{n-2}\ (n \geq 3)$에서 n이 짝수일 때의 관계식을 구하기 위해

[방법 1]

$n = 2k-1$ (k는 자연수)일 때

$2A_{2k-1} = B_{2k} - B_{2k-1} - B_{2k-2} + B_{2k-3}$ 이고 $2A_1 = B_2 - B_1$ 이므로

k에 차례로 $2, 3, 4, \cdots, k$를 대입하면

$$\begin{cases} 2A_{2k-1} = B_{2k} - B_{2k-1} - B_{2k-2} + B_{2k-3} \\ 2A_{2k-3} = B_{2k-2} - B_{2k-3} - B_{2k-4} + B_{2k-5} \\ \qquad \vdots \\ 2A_3 \qquad = B_4 - B_3 - B_2 + B_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $B_{2k} = B_{2k-1} + 2A_{2k-1} + 2A_{2k-3} + \cdots + 2A_1$ ……… (**) 이다.

$A_n = 3^{n-1}$ 이므로 식 (**)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} B_{2k} &= B_{2k-1} + 2(3^{2k-2} + 3^{2k-4} + \cdots + 3^2 + 1) \\ &= B_{2k-1} + \frac{1}{4}(3^{2k} - 1) \end{aligned}$$

이고,

같은 방법으로 $n = 2k$ (k는 자연수)일 때는

$B_{2k+1} = B_{2k} + \frac{3}{4}(3^{2k} - 1)$ 이다.

[방법 2]
$n=2k$ (k는 자연수)일 때
$2A_{2k}=B_{2k+1}-B_{2k}-B_{2k-1}+B_{2k-2}$이고 $2A_2=B_3-B_2$이므로
k에 차례로 $2,3,\cdots,k$를 대입하면

$$\begin{cases} 2A_{2k} &= B_{2k+1}-B_{2k}-B_{2k-1}+B_{2k-2} \\ 2A_{2k-2} &= B_{2k-1}-B_{2k-2}-B_{2k-3}+B_{2k-4} \\ &\vdots \\ 2A_4 &= B_5-B_4-B_3+B_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ B_{2k+1}=B_{2k}+2A_{2k}+2A_{2k-2}+\cdots+2A_2$ ········· (**) 이다.
$A_n=3^{n-1}$이므로 식 (**)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} B_{2k+1} &= B_{2k}+2(3^{2k-1}+3^{2k-3}+\cdots+3^3+3) \\ &= B_{2k}+\frac{3}{4}(3^{2k}-1) \end{aligned}$$

이고,
같은 방법으로 $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때는
$B_{2k}=B_{2k-1}+\frac{1}{4}(3^{2k}-1)$이다.

[방법 1] 또는 [방법 2]에 의하여
그러므로

$$\begin{aligned} B_{2k+2} &= B_{2k+1}+\frac{1}{4}(3^{2k+2}-1) \\ &= \left(B_{2k}+\frac{3}{4}(3^{2k}-1)\right)+\frac{1}{4}(3^{2k+2}-1) \\ &= B_{2k}+9\cdot 3^{2k-1}-1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $B_{n+2}=B_n+9A_n-1$이다.
$\therefore p=1, q=9, r=-1$

【문항 3】

3-1.

원점이 중심이고 반지름이 1인 구를 S라 하자.
구 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y, z)$라 놓고, 제시문 (나)에 의해 두 점 N, P사이의 사이각이 $\frac{\pi}{4}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 내적하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{ON}}|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|=1$이므로, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
점 P_0는 구 S를 평면 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$으로 절단하여 평면 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 위에 놓인 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$에서 x좌표가 큰 점이다. 따라서 P_0의 좌표는 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이다.
위와 같은 방법으로 점 Q_0의 x좌표는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

점 Q_0는 평면 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 위의 놓인 원 $y^2+z^2=\frac{1}{2}$에서 y좌표가 가장 큰 점이므로

$Q_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$이다.

3-2.

점 P는 $P_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$에서 z 축을 회전축으로 하여 y좌표가 증가하는 방향으로 일정한 각속도 ω(양수인 상수)로 한 바퀴 회전하므로 시각 t에서의 위치는

$P(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이다. (단, $P(0)=P_0$)

점 Q는 $Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$에서 x 축을 회전축으로 하여 z좌표가 증가하는 방향으로 각속도 ω로 한 바퀴 회전하므로 시각 t에서의 위치는

$Q(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t)\right)$이다. (단, $Q(0)=Q_0$)

움직이고 있는 두 점 $P(t)$, $Q(t)$의 사이각을 $0\le\theta(t)\le\pi$라 하자.
$\cos x$는 구간 $0\le x\le\pi$에서 감소함수이므로 사이각 $\theta(t)$의 크기의 최솟값 α에 대한 $\cos\alpha$을 구하기 위해 $\cos(\theta(t))$의 최댓값을 구하면 된다.

$\overrightarrow{OP(t)}\bullet\overrightarrow{OQ(t)}=|\overrightarrow{OP(t)}||\overrightarrow{OQ(t)}|\cos(\theta(t))=\cos(\theta(t))$이고, $|\overrightarrow{OP(t)}|=|\overrightarrow{OQ(t)}|=1$ 이므로

$\cos(\theta(t))=\overrightarrow{OP(t)}\bullet\overrightarrow{OQ(t)}=\frac{1}{2}(\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\cos(\omega t)+\sin(\omega t))$의 최댓값을 구하자.

$\cos(\omega t)+\sin(\omega t)=s$라 놓으면, $-\sqrt{2}\le s\le\sqrt{2}$이고 $\cos(\omega t)\sin(\omega t)=\frac{s^2-1}{2}$이다.

구간 $-\sqrt{2}\le s\le\sqrt{2}$에서 $\frac{1}{2}\left(s+\frac{s^2-1}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$이므로

구하는 $\cos\alpha=\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$이다.