2015학년도 수시모집 지역인재전형I 논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계
	□	☑수학

1. 출제의도 및 문제해설

[출제의도]

2015학년도 수시모집 지역인재전형I 수학 논술고사는 세 개의 문항으로 출제하였고 각 문항은 두 세 개의 소 논제로 구성하였으며 지역의 우수한 인재를 대상으로 하였기에 오전에 비하여 다소 난이도를 두었다. 고등학교 수학교육과정에서 배우는 정의와 개념에 대한 이해력과 문제해결을 위한 논리적인 분석과 유추능력을 평가할 수 있도록 노력 하였고, 이를 위하여 단순히 공식에 대입하여 풀거나 수학 소프트웨어로 단순 대입하여 풀 수 있는 복잡하게 보이는 계산은 지양하였으며 주어진 제시문을 정확히 이해하고 참고하여 문제를 분석한 후 응용할 수 있는 문제해결능력을 보고자 노력하였다.

[문항해설]

본 문항은 고등학교 교육과정의 행렬, 쌍곡선의 정의, 함수의 극한, 평균값의 정리, 가우스기호, 로그함수, 무한등비급수의 합 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.

【문항 1】

1-1. 주어진 제시문을 정확히 이해하여 주어진 조건으로부터 이차곡선의 표준형을 구할 수 있는지를 보는 문제로 분석력과 계산력을 평가한다.

1-2. 쌍곡선의 정의를 이해하고 곡선 위의 임의의 점은 두 초점과의 거리의 차가 일정하다는 사실을 알고 이를 응용할 수 있는지 평가한다.

【문항 2】

2-1. 좌극한, 우극한의 정확한 정의를 알고 이를 이해하여 그 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

2-2. 중간값 정리의 의미를 문제에 적용하여 해결하는 능력과 논리적 사고력을 평가한다.

2-3. 닫힌구간에서 연속함수가 최댓값과 최솟값을 가짐을 알고 중간값의 정리를 정확히 이해하여 정리와 무관해 보이는 문제에 적용할 수 있는지를 평가한다.

【문항 3】

3-1. 가우스기호를 수식으로 해석할 수 있고 로그 함수의 성질을 정확히 이해 할 수 있으며 집합으로 주어진 도형의 면적을 계산할 수 있는지 평가한다.

3-2. 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제로써 수열이 등비급수임을 이해하고 무한등비급수의 합을 계산하는 능력을 평가한다.

3-3. 확률의 정의를 이해하고 있으며 이를 수식화하여 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 종합평가 기준

문항	평가영역	평가내용	난이도	배점	출제영역	
					교과목	교과서 개념
1-1	이해, 적용, 문제해결	회전변환의 이차곡선에의 활용	중	15	수학	회전변환
1-2	이해, 추론, 문제해결	쌍곡선의 정의의 이해	중	15	수학	쌍곡선의 정의
2-1	이해, 적용, 분석	적합한 경우의 수를 구해내기	중	15	수학	인수정리와 극한
2-2	이해, 적용	중간값 정리	중	10	수학	중간값 정리
2-3	이해, 적용, 문제해결	최대 최소의 정리	상	15	수학	최대 최소의 정리
3-1	이해, 수학적해석, 문제해결	수열의 일반항 구하기	상	15	수학	중간값 정리 및 최대 최소의 정리
3-2	이해, 계산	무한급수의 값 구하기	하	5	수학	무한등비급수의 값 구하기
3-3	이해, 수학적해석, 문제해결	확률 구하기	중	10	수학	기하학적 확률 구하기

모 범 답 안

■ 모범답안

【문항 1】

1−1.

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}$

$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$, $y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$ 를 $5x^2 - 6\sqrt{3}\,xy - y^2 - 24 = 0$에 대입하면

$5(x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2 - 6\sqrt{3}(x'\cos\theta + y'\sin\theta)(-x'\sin\theta + y'\cos\theta) - (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 - 24 = 0$

풀어서 정리하면

$$\begin{aligned}(5\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta)x'^2 + (5\sin^2\theta - 6\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta)y'^2 \\ + (6\sqrt{3}\sin^2\theta + 12\cos\theta\sin\theta - 6\sqrt{3}\cos^2\theta)x'y' - 24 = 0 \qquad (*)\end{aligned}$$

이므로

$$6\sqrt{3}\sin^2\theta + 12\cos\theta\sin\theta - 6\sqrt{3}\cos^2\theta = 0 \qquad (**)$$

가 되기 위한 θ를 구하기 위해

[방법1]

식 (**)를 $\cos^2\theta$로 나누어

$\sqrt{3}\tan^2\theta + 2\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ 를 만족하는 $\tan\theta > 0$ $(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$를 구하면

(근의 공식 또는 인수분해 이용)

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로,

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 이고

(*)에 대입하면,

$2x'^2 - y'^2 - 6 = 0$ 가 된다.

[방법2]

2배각 공식 $2\sin\theta\cos\theta = \sin2\theta$ 와 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos2\theta$ 를 이용하면 식 (**)는

$\sqrt{3}\cos2\theta = \sin2\theta$ 이므로

$\tan2\theta = \sqrt{3}$ 이고

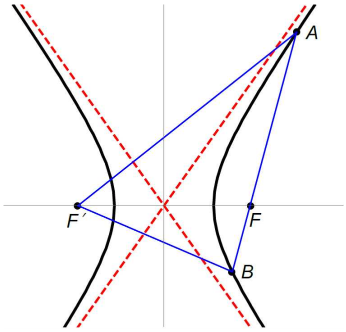
$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 즉, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 이고

(*)에 대입하면,

$2x'^2 - y'^2 - 6 = 0$ 가 된다.

1-2.
회전 변환에 의해 초점과 이차곡선 위의 점들과의 거리는 변화하지 않으므로,

쌍곡선 $2x'^2 - y'^2 - 6 = 0$ 즉 $\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{6} = 1$ 의 초점을 F와 F'라 하고 F를 지나는 직선이 $\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{6} = 1$ 과 만나는 점을 A와 B라고 할 때,



쌍곡선위의 점 A와 B에서 두 초점까지의 거리의 차가 $2\sqrt{3}$으로 일정하므로
$\overline{AF'} - \overline{AF} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\overline{F'B} - \overline{FB} = 2\sqrt{3}$ 이므로 두식을 합하면
$\overline{AF'} + \overline{F'B} - \overline{AB} = 4\sqrt{3}$ $\quad (i)$ 이고
삼각형 $AF'B$의 둘레의 길이가 $12\sqrt{3}$이므로
$\overline{AF'} + \overline{F'B} + \overline{AB} = 12\sqrt{3}$ $\quad (ii)$ 이다.
식 (ii) 에서 식 (i)를 빼면 $2\overline{AB} = 8\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ 이다.

【문항 2】

2-1.
$f(0)=0$ 이므로 $f(x) = x^m g(x)$ (단, m은 자연수, $g(x)$는 다항식, $g(0) \neq 0$)의 꼴로 나타낼 수 있다.
$f'(x) = mx^{m-1}g(x) + x^m g'(x)$ 이므로
$0 < x < 1$에 대하여
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + \frac{g'(x)}{g(x)}$ 이고,
$\lim_{x \to 0+0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\lim_{x \to 0+0} \frac{m}{x}\right) + \frac{g'(0)}{g(0)} = \infty$.
마찬가지로, $f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-1)^k h(x)$ (단, k은 자연수, $h(x)$는 다항식, $h(1) \neq 0$)의 꼴로 나타낼 수 있다.
$f'(x) = k(x-1)^{k-1}h(x) + (x-1)^k h'(x)$ 이므로 $0 < x < 1$에 대하여
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x-1} + \frac{h'(x)}{h(x)}$ 이고,
$\lim_{x \to 1-0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\lim_{x \to 1-0} \frac{k}{x-1}\right) + \frac{h'(1)}{h(1)} = -\infty$.

2-2.

$f(x)$가 다항식이므로 $f'(x)$도 다항식이고, 다항식은 연속함수이며,

$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \neq 0$이므로 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$는 연속함수이고

2-1에서 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\infty$, $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\infty$이므로 (라)에 의하면 임의의 실수 r에 대하여 $\dfrac{f'(a)}{f(a)}=r$인 a가 구간 $(0,1)$에 반드시 존재한다.

즉, $f'(a)=rf(a)$인 a가 구간 $(0,1)$에 존재한다.

2-3.

(나)에 의해, 닫힌구간 $[0,1]$에서 $g(x)$는 연속함수이므로 구간 $[0,1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간$[0,1]$에서 $g(x)$의 최댓값을 M 최솟값을 m이라 두자.

$[0,1]$에서 $f(x) \geq 0$이므로

$mf(x) \leq f(x)g(x) \leq Mf(x)$이다.

각 변을 0에서 1까지 적분하면

$m\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx \leq M\int_0^1 f(x)dx$이고,

$\int_0^1 f(x)dx = 1$이므로, $m \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx \leq M$ 이다.

(다)에 의하면 $\int_0^1 f(x)g(x)dx = g(b)$ 인 b가 구간 $[0,1]$에 존재한다.

【문항 3】

3-1.

가우스 함수 [ ]의 정의는 임의의 실수 x에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때 $[x]=n$ (여기서 n은 정수)이다.

$(x,y) \in A_n = \left\{(x,y)\in\triangle \mid \left[\log_2\dfrac{x}{y}\right]=2n-1\right\}$이면 $\left[\log_2\dfrac{x}{y}\right]=2n-1$이다. 그러므로

$$2n-1 \leq \log_2\frac{x}{y} < 2n$$

$$2^{2n-1} \leq \frac{x}{y} < 2^{2n}$$

역수를 취하여

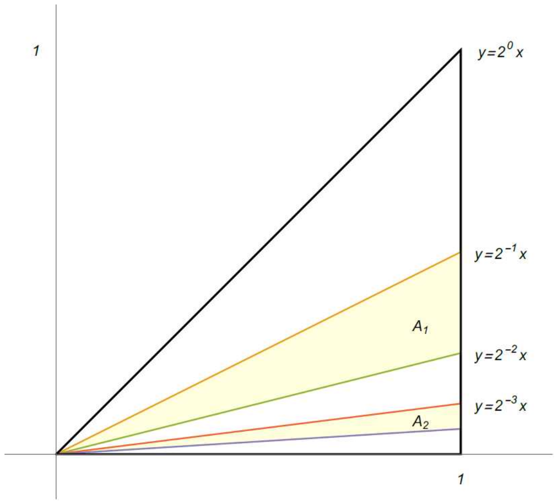
$$\frac{1}{2^{2n}} < \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}$$

이 된다. 그러므로

$$\frac{1}{2^{2n}}x < y \leq \frac{1}{2^{2n-1}}x$$

을 얻을 수 있다

이를 그림으로 그려보면 다음과 같다.



삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$높이$\times$밑변이므로

$$a_n = A_n\text{의 넓이} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

이 된다.

3-2.

수열 a_n은 등비급수로

공비가 $\frac{1}{4}$, 초항이 $\frac{1}{8}$이다.

무한등비급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

이다.

3-3.

구하는 확률 $= \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{S\text{의 넓이}}$ 이다. ....(4점)

S의 넓이가 $\frac{1}{4}$이므로 ....(4점)

3-2의 결과로부터

$$\text{확률} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{S\text{의 넓이}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$ ....(2점)

를 얻을 수 있다.