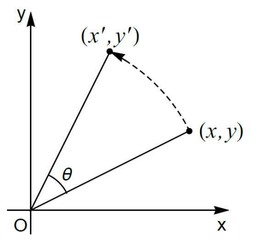
2015학년도 부산대학교 수시모집 지역인재전형 I

논 술 고 사(자연계) 문 제 지

지원학과(학부)		수험번호		성명		과목	수학

【유의사항】
1. 시험시간은 100분입니다.
2. 답안은 답안지의 해당 문항 번호에 연필 또는 샤프로 작성하시오.
3. 답안 수정 시 지우개 사용 가능합니다.
4. 문항 번호를 기술하고, 답을 작성하시오.
5. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 마시오.
6. 답안 연습은 연습지를 활용하시오.
7. 답안지, 연습지 및 문제지에 필요한 인적사항을 기입하였는지 확인하시오.

【문항1】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.



점 (x,y)를 원점 O를 중심으로 각 θ만큼 회전이동한 점을 (x',y')라고 할 때,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 이다.

1-1. 이차곡선 $5x^2 - 6\sqrt{3}\,xy - y^2 - 24 = 0$을 원점 O를 중심으로 적당한 $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$만큼 회전이동하여 $Ax'^2 + By'^2 + C = 0$의 꼴로 표현하시오. (15점)

1-2. 이차곡선 $5x^2 - 6\sqrt{3}\,xy - y^2 - 24 = 0$의 두 초점 F와 F'에 대하여 F를 지나는 직선이 이차곡선과 만나는 점을 A와 B라고 하자(단, 점 F는 선분 $\overline{AB}$ 위에 있다).
삼각형 $AF'B$의 둘레의 길이가 $12\sqrt{3}$일 때, 선분 $\overline{AB}$의 길이를 구하시오. (15점)

【문항2】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

(가) x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 한없이 커질때,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$$

와 같이 나타내고,

x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 한없이 작아질때,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$$

와 같이 나타낸다.

(뒷면에 계속)

(나) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 구간 $[a,b]$에서의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $m \le r \le M$ 인 임의의 실수 r에 대하여, $f(c)=r$인 실수 c가 구간 $[a,b]$에 존재한다.
(라) 열린구간 (a,b)에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$이고 $\lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty$이면 임의의 실수 r에 대하여 $f(c)=r$인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.
(마) $f(x)$가 다항식이고 $f(a)=0$ 이면, $f(x)=(x-a)^k g(x)$로 표현된다.
이때, k는 자연수, $g(x)$는 다항식이고 $g(a) \neq 0$이다.

$f(x)$는 다항식이고 $f(0)=f(1)=0$이며, 열린구간 $(0,1)$에서 $f(x)>0$라 할 때,

2-1. $\lim_{x \to 0+0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \infty$이고 $\lim_{x \to 1-0} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$가 됨을 증명하시오. (15점)

2-2. 임의의 실수 r에 대하여 $f'(a)=rf(a)$인 a가 구간 $(0,1)$에 존재함을 증명하시오. (10점)

2-3. $\int_0^1 f(x)dx = 1$ 일 때, 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여,
$\int_0^1 f(x)g(x)dx = g(b)$ 인 b가 구간 $[0,1]$에 존재함을 증명하시오. (15점)

【문항 3】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

임의의 실수 x에 대하여 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$로 나타낸다.
예를 들어, $[3.14]=3$, $[7]=7$이다.

$\triangle$는 평면상의 세 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$을 꼭지점으로 하는 직각 삼각형의 내부의 점들로 이루어진 집합이다. 즉, $\triangle = \{(x,y) \mid 0<x<1,\ 0<y<x\}$이다.
자연수 n에 대하여 $\triangle$의 부분집합 A_n을 $A_n = \left\{(x,y) \in \triangle \mid \left[\log_2 \frac{x}{y}\right] = 2n-1\right\}$로 정의하고, A_n의 면적을 a_n이라 할 때,

3-1. a_n을 구하시오. (15점)

3-2. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. (5점)

3-3. $\triangle$의 점(x,y) 중 $\left[\log_2 \frac{x}{y}\right]$가 자연수가 되는 점$(x,y)$의 전체 집합을 S라고 할 때, 집합 S에서 임의의 점(a,b)를 뽑았을 때 $\left[\log_2 \frac{a}{b}\right]$가 홀수가 될 확률을 구하시오. (10점)

*** 주의사항 : 문제지, 연습지, 답안지에 필요한 인적사항을 기입하였는지 확인하시오.**