2015학년도 수시모집 논술전형 논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계
	□	☑수학

1. 출제의도 및 문제해설

[출제의도]

크게 두 개의 문제로 나누어 출제했으며, 문제는 각각 세 개의 소 논제들로 구성되는 데, 전체 문제들은 모두 수학 관련 내용에서 출제하였다. 고등학교 수학교과서에서 다루는 개념이나 원리, 정의들을 기본으로 하여 주어진 제시문을 이해하고, 이를 바탕으로 창의력과 개념들 사이의 통합적 사고를 발휘하여 문제가 요구하는 결론에 논리적으로 도달할 수 있는 지를 평가하기 위한 문제들로 출제하였다.

[문제해설]

고등학교 교육과정에서 익힌 단편적인 핵심개념들을 통합하여 문제를 해결하는 능력을 알아보고자 하였다. 고등학교 교육과정의 행렬, 벡터, 경우의 수, 함수, 연속함수, 미분, 적분, 부등식 등에 관한 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.

【문항 1】

제시문에서 2차 정방행렬의 곱, 전치행렬, 행렬의 대각합을 정의하고 이를 이용하여 두 2차 정방행렬의 행렬내적을 정의한다. 이는 교육과정에서 배우는 벡터의 내적을 행렬내적으로 바꾸어 놓은 형태이다. 행렬내적을 이용하여 두 행렬의 사잇각을 정의한다. 정의된 개념들을 통합하여 문제를 해결하는 능력을 알아보고자 하였다.

[1-1]

영 행렬이 아닌 경우 같은 행렬의 행렬내적은 항상 양의 실수임을 보이라는 문제이다. 2차 정방행렬의 곱, 전치행렬, 행렬의 대각합 등의 기본 개념을 이해했는지를 알아보고자 한다.

[1-2]

코사인 함수를 사용하여 두 행렬의 사잇각을 계산할 수 있는지 알아보고자 한다.

[1-3]

행렬의 크기 개념을 이해하고 경우의 수와 연계하여 통합된 사고를 할 수 있는지 알아보고자 한다.

【문항 2】

제시문에서 고등학교 수학교과서에서 다루는 미분가능한 함수의 미분계수의 부호와 함수의 감소성의 관계와 연속함수의 중간값 정리를 준다. 주어진 제시문을 힌트로 하여 핵심개념들을 통합하여 문제를 해결하는 능력을 알아보고자 하였다.

[2-1]

구체적으로 주어진 함수에 대해 미분을 하고 미분계수의 부호를 통하여 함수의 감소성을 파악할 수 있는지를 알아보고자 한다.

[2-2]

중간값 정리를 상황에 맞게 적절하게 적용할 수 있는지를 알아보고자 한다.

[2-3]
문항 [2-1]과 [2-2]에서 해결한 내용을 기본으로 하여 적분계산과 부등식 개념이 통합된 문제를 해결 할 수 있는지를 알아보고자 한다. 상당한 창의력이 요구되는 문제이다.

2. 종합평가 기준

문항	평가영역	평가내용	난이도	배점	출제영역	
					교과목	교과서 개념
1-1	이해, 적용, 분석	정의식을 이해하고 적용하기	중	10	수학	행렬의 계산
1-2	이해, 적용	정의식을 이해하고 적용하기	중	8	수학	행렬과 삼각함수의 계산
1-3	이해, 분석	적합한 경우의 수를 구해내기	중	7	수학	행렬과 경우의 수
2-1	이해, 계산	감소함수의 정의	하	7	수학	미분계수의 의미
2-2	이해, 추론, 적용,	중간값 정리의 이해 및 적용	중	8	수학	중간값 정리
2-3	이해, 적용, 문제해결	역함수와 부등식 이해 및 적용	상	20	수학	역함수와 적분

모 범 답 안

■ 모범답안

【문항 1】

1-1.

$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 이면 $A^t=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$이므로 $AA^t=\begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1a_3+a_2a_4 \\ a_1a_3+a_2a_4 & a_3^2+a_4^2 \end{pmatrix}$

$\langle A,A\rangle=\mathrm{tr}(AA^t)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1a_3+a_2a_4 \\ a_1a_3+a_2a_4 & a_3^2+a_4^2 \end{pmatrix}\right)=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ 이다.

그러므로 $A\neq O$ 이면 $\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^{4}a_i^2>0$ 이다.

1-2.

$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^t)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right)=-2$ 이고,

$\| A \| = \sqrt{4}=2$, $\| B \| = \sqrt{2}$ 이므로,

두 행렬 A 와 B의 사잇각을 θ라고 하면 $\cos\theta=\dfrac{\langle A,B\rangle}{\| A \|\ \| B \|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

그러므로, $\theta=\dfrac{3\pi}{4}(\mathrm{rad})\ (=135^\circ)$ 이다.

1-3.

$\| A \| = 2$ 이면 $\| A \|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=4$ 이다.

이를 만족하는 정수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 를 찾아 보면,

$a_1^2=a_2^2=a_3^2=a_4^2=1$

즉, $a_1=\pm 1$, $a_2=\pm 1$, $a_3=\pm 1$, $a_4=\pm 1$인 경우의 수가 $2^4=16$ 가지

그리고

$a_1^2=4$, $(a_2^2=a_3^2=a_4^2=0)$, $a_2^2=4$, $(a_1^2=a_3^2=a_4^2=0)$,

$a_3^2=4$, $(a_1^2=a_2^2=a_4^2=0)$, $a_4^2=4$, $(a_1^2=a_2^2=a_3^2=0)$

인 경우, 즉,

$(a_1=\pm 2,\ a_2=a_3=a_4=0)$, $(a_2=\pm 2,\ a_1=a_3=a_4=0)$,

$(a_3=\pm 2,\ a_1=a_2=a_4=0)$, $(a_4=\pm 2,\ a_1=a_2=a_3=0)$,

인 경우 8가지로

모두 $16+8=24$가지 있다.

【문항 2】

2-1.

함수 $f(x)=e^x(1-x)$는 열린 구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수이고

$$f'(x)=-xe^x<0$$

이므로 ((나)에 의하면) 함수 f는 감소함수이다.

2-2.

[존재성] $f(0)=1,\ f(1)=0$이므로 실수 t는 $f(0)$와 $f(1)$사이에 있다

함수 f는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속함수이므로 (다)중간값 정리에 의하여 $f(a_t)=t$인 a_t가 구간 $(0,1)$에 존재한다.

[유일성] a_t가 유일함을 보이자(모범답안으로 세 가지 방법을 제시한다).

$f(a_t)=f(b_t)=t$ 인 서로 다른 a_t 와 b_t가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다고 가정하자.

[방법1]

함수 f가 $[0,1]$에서 감소함수이므로 일대일대응이다.

따라서 $a_t,\ b_t$가 서로 다르면 $f(a_t)$와 $f(b_t)$도 서로 달라야한다.

이것은 $f(a_t)=f(b_t)=t$에 모순이다.

(혹은 $f(a_t)=f(b_t) \Rightarrow a_t=b_t$. 이것은 서로 다른 a_t와 b_t 라는 것에 모순이다.)

[방법2]

$$\begin{aligned} a_t \neq b_t &\Rightarrow a_t<b_t \text{ 또는 } b_t<a_t \\ &\Rightarrow f(b_t)<f(a_t) \text{ 또는 } f(a_t)<f(b_t) \quad (\because f\text{는 감소함수}) \end{aligned}$$

이것은 $f(a_t)=f(b_t)=t$에 모순이다.

[방법3]

평균값정리에 의하면

$0=f(b_t)-f(a_t)=f'(c)(b_t-a_t)\neq 0$ $(\because f'(c)<0)$ 인 점 c가 a_t 와 b_t사이에 존재한다.

이것은 $f(a_t)=f(b_t)=t$에 모순이다.

2-3.

$$\text{함수 } f\text{가 감소함수이므로 } 0\le x\le a_t \Rightarrow t=f(a_t)\le f(x)\ (\because f:\text{감소함수})$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{t}\ge 1$$
$$\Rightarrow \frac{e^x(1-x)}{t}\ge 1$$

이다.

그러므로

$$\begin{aligned} &\int_0^{a_t}\frac{1}{(1-x)^2}\,dx \\ &\le \int_0^{a_t}\frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{e^x(1-x)}{t}\right)^2 dx \quad \left(\because \frac{e^x(1-x)}{t}\ge 1,\ 0\le x\le a_t\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\int_0^{a_t}e^{2x}\,dx \\ &\le \frac{1}{t^2}\int_0^{1}e^{2x}\,dx \quad (\because a_t\le 1) \\ &= \frac{1}{2t^2}(e^2-1). \end{aligned}$$

[별해 1]

편의상 $a = a_t$라 하자. (즉, $t = e^a(1-a)$이고, $0 < t < 1$, $0 < a < 1$ 이다.)

f가 감소함수이므로,

$$0 < x < a \Rightarrow e^x(1-x) > e^a(1-a) \Rightarrow \frac{e^x(1-x)}{e^a(1-a)} > 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2t^2}(e^2-1) &= \frac{1}{2(e^a(1-a))^2}\int_0^1 2e^{2x}dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^a(1-a))^2}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^a(1-a))^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}dx \\
&\geq \int_0^a \frac{e^{2x}}{(e^a(1-a))^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}dx \\
&= \int_0^a \frac{(e^x(1-x))^2}{(e^a(1-a))^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}dx \\
&\geq \int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}\, dx \qquad \left(\because \frac{e^x(1-x)}{e^a(1-a)} > 1,\ 0 < x < a\right)
\end{aligned}$$

[별해 2]

편의상 $a = a_t$라 하자. (즉, $t = e^a(1-a)$이고, $0 < t < 1$, $0 < a < 1$ 이다.)

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}dx &= \left|(1-x)^{-1}\right|_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 \\
&= \frac{e^a}{t} - 1 = \frac{e^a - t}{t} = \frac{ae^a}{t} = a\frac{e^a}{t} \leq 1 \cdot \frac{e}{t} \\
&\leq \frac{e}{t}\frac{2}{2t} < \frac{1}{t}\frac{e^2-1}{2t} \quad (\because\ e > 1+\sqrt{2} \text{ 이고 } x > 1+\sqrt{2} \Rightarrow x^2-2x-1 > 0)
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.