■ 출제 의도

2-1. 평행이동을 이해하고 로그함수의 성질을 알고 있으며 무한등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

2-2. 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정에 관해 정확히 이해하고 주어진 함수의 극대/극소를 판정할 수 있는지 평가하는 문제이다.

2-3 정적분과 넓이와의 관계를 올바로 이해하고 있는지의 여부를 절대값이 포함된 함수를 통해 평가하는 문제이다.

2-4 연립부등식으로 주어진 영역의 넓이를 수식으로 표현하고 합성함수의 미분법을 활용해 넓이의 순간변동을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

■ 문항 해설

제시문의 내용은 수학을 활용해 각종 문제를 해결하는데에 가장 기초적인 내용의 일부를 구성한다. 따라서 이를 활용해 평행이동을 이해하고 로그함수의 성질을 알고 있으며 무한등비급수의 합을 구할 수 있는지, 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정에 관해 정확히 이해하고 주어진 함수의 극대/극소를 판정할 수 있는지, 정적분과 넓이와의 관계를 올바로 이해하고 있는지, 연립부등식으로 주어진 영역의 넓이를 수식으로 표현하고 합성함수의 미분법을 활용해 넓이의 순간변동을 구할 수 있는지 등을 평가하는 문제로 구성되어 있다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1]	이 곡선의 x절편 $a_k=\dfrac{3}{2^k}$을 구한다.	3
	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\dfrac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$을 구한다.	2
[2]	$f'(a)=0$이므로 $3\cos a+\sin a=0$ 을 구한 후 $\cos a\neq 0$임을 확인하고 양변을 $\cos a$으로 나누어 $\tan a=-3$을 구한다.	5
	$f''(x)=e^{-3x}(8\cos x+6\sin x)$을 올바로 얻고 $f''(a)>0$을 이용하여 $\cos a<0$이므로 $\cos a=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$을 구한다.	5
[3]-(1)	치환적분법을 활용하여 $\int \tan x\,dx=\int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \dfrac{1}{t}dt=-\ln\lvert t\rvert+C$을 구한다.	6
	적분 상수를 빠트리면	-2
[3]-(2)	$\int_{\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}\lvert\tan x\rvert\,dx=\ln 2$를 올바로 계산한다.	5
	그러므로 $S_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\ln 2$을 얻는다.	2
[4]-(1)	부채꼴 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}3^2(2\theta)=9\theta$을 얻는다	3
	삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{9}{2}\sin 2\theta$을 얻는다.	3
[4]-(2)	$g(\theta)=9\pi-9\theta+\dfrac{9}{2}\sin 2\theta$을 올바로 얻는다.	6
[4]-(3)	$t=\tan\theta$을 이용하여 $g'(\theta)=f'(\tan\theta)\sec^2\theta$을 올바로 얻는다.	3
	$g'(\theta)=-9+9\cos 2\theta=-9+9(1-2\sin^2\theta)=-18\sin^2\theta$를 얻는다.	3
	$f'(1)=-18\sin^2\theta\cos^2\theta=-\dfrac{9}{2}$	4

■ 예시 답안

[1]
$y=\log_2 x$를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키면 $y=\log_2 x+b$이다. 이 곡선이 점 $(3,k)$를 지나기 때문에 $b=\log_2\dfrac{2^k}{3}$이다. 이 곡선의 x절편 $a_k=\dfrac{3}{2^k}$이므로 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\dfrac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

[2]

$f(x)=e^{-3x}\cos x$이므로 $f'(x)=-e^{-3x}(3\cos x+\sin x)$

$f'(a)=0$이므로 $3\cos a+\sin a=0$. 여기서 $\cos a\neq 0$ 이다. (만약 $\cos a=0$이라면 $a=\frac{\pi}{2}$ 또는 $a=\frac{3\pi}{2}$이다. 이때 $\sin\frac{\pi}{2}=1$이고 $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$이므로 두 경우 모두 $3\cos a+\sin a\neq 0$이다). 따라서 양변을 $\cos a$으로 나눌 수 있고 그렇게 하면 $\tan a=-3$

$f''(x)=e^{-3x}(8\cos x+6\sin x)$이고 $3\cos a+\sin a=0$으로부터 $f''(a)=e^{-3a}(-10\cos a)$이며 제시문 2의 ㉡에 의해 $f''(a)>0$이므로 $\cos a<0$이고 $\tan^2 a+1=\sec^2 a$으로부터

$\cos a=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

[3]

(1) $\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$에서 $t=\cos x$로 치환하면

$\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln|t|+C$ (단, C는 적분상수)

구하는 식은 $-\ln|\cos x|+C$ (단, C는 적분상수)

(2)

$y=\tan x$의 그래프를 통해

$\int_{\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}|\tan x|\,dx=2\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}\tan x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=2[-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln 2$임을 알 수 있다. 그러므로 $S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\ln 2$

[4]

(1)

$\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 OAB에서 $\angle AOB=2\theta$

그러므로 부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}3^2(2\theta)=9\theta$, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{9}{2}\sin 2\theta$

(2)

위 (1)로부터 연립부등식 $\begin{cases} y<t(x+2) \\ (x+2)^2+(y-3)^2\leq 9\end{cases}$가 나타내는 영역의 넓이는 $9\theta-\frac{9}{2}\sin 2\theta$. 따라서 $g(\theta)=9\pi-9\theta+\frac{9}{2}\sin 2\theta$

(3)

$t=\tan\theta$이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$이다. 양변을 θ에 대하여 미분하면

$g'(\theta)=f'(\tan\theta)\sec^2\theta$

(2)에서 $g'(\theta)=-9+9\cos 2\theta=-9+9(1-2\sin^2\theta)=-18\sin^2\theta$이다.

$t=1$일 때 $\tan\theta=1$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그러므로

$f'(1)=-18\sin^2\theta\cos^2\theta=-\frac{9}{2}$