자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 도형의 평행이동

방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a,y-b)=0$

2. 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때

㉠ $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.

㉡ $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

3. 함수의 곱의 미분법

미분 가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

4. 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a, y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

5. 합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$를 미분하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 또는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

[1] $y=\log_2 x$를 y축의 방향으로 평행이동시켜 점 $(3,k)$ (k는 자연수)를 지나도록 하는 곡선의 x절편을 a_k라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 값을 구하시오. [5점]

[2] 열린구간 $(0,2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\cos x}{e^{3x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 갖는다. 이때 $\tan a$와 $\cos a$의 값을 구하시오. [10점]

[3] 자연수 n에 대하여 구간 $\left[\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{4}\right)\pi\right]$에서 곡선 $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^n \tan x\right|$와 x축, 그리고 직선 $x=\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi$와 $x=\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 부정적분 $\int \tan x\,dx$를 구하시오. [6점]

(2) S_n을 구하시오. [7점]

[4] 양의 실수 t에 대하여 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} y \geq t(x+2) \\ (x+2)^2+(y-3)^2 \leq 9 \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 원 C: $(x+2)^2+(y-3)^2=9$의 중심을 O, 원 C와 직선 $l: y=t(x+2)$가 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때 $\angle AOB$의 크기와 부채꼴 OAB와 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. [6점]

(2) 주어진 연립 부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때 $g(\theta)$를 구하시오. [6점]

(3) t와 θ의 관계 및 $g(\theta)$를 이용하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [10점]