■ 출제 의도

[1] 도형의 평행이동, 무리수를 포함한 분모의 유리화과정에 대한 이해력과 수열의 합에 대한 계산능력을 평가한다.

[2] (1) 함수의 합성과 함수의 극한의 이해력 및 계산능력을 평가한다.

(2) 함수의 합성에 대한 이해력 및 논리력을 평가한다.

[3] 3차 방정식의 허근에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다.

[4] 함수 $[x]$의 이해와 이차부등식에 대한 계산능력을 평가한다.

■ 문항 해설

도형의 평행이동, 무리수, 수열의 합, 함수의 합성, 이차부등방정식 및 함수의 극한 등의 개념은 인문학과 자연과학을 포함한 모든 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념이다. 이러한 개념들을 이해하면 다음과 같은 간단한 과정을 통해 해결할 수 있는 문항이라고 할 수 있다.

1. 도형의 평행이동, 무리수를 포함한 분모의 유리화과정을 수행함으로써 해결할 수 있는 문항이다.
2. (1) 함수의 합성과 함수의 극한을 계산함으로써 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 나눗셈 정리를 적용하고 함수의 합성을 구함으로써 해결할 수 있는 문항이다.
3. 3차 방정식의 허근에 대한 성질을 적용함으로써 계산할 수 있는 문항이다.
4. 함수 $[x]$의 성질을 이해하고 계산함으로써 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$g(n)=\sqrt{n-k+2}+\sqrt{n-k+1}$ 을 구했으면	3
	$\dfrac{2}{g(n)}=2(\sqrt{n-k+2}-\sqrt{n-k+1})$을 구했으면	3
	$\displaystyle\sum_{n=1}^{2018}\frac{2}{g(n)}=2(\sqrt{2020-k}-\sqrt{2-k})$를 구했으면	4
2-1	$g(x)=x$를 구했으면	5
	$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{6}$을 구했으면	4
2-2	$n=3t$ 또는 $n=3t+1$ 또는 $n=3t+2$인 정수 t가 존재함을 설명했으면	3
	$n=3t$이면 $h(x)=x$이고 $n=3t+1$이면 $h(x)=\dfrac{1}{1-x}$임을 설명했으면	4
3	$f(w)=0$을 구했으면	3
	$f(w)=aw^{52}+bw^{27}+1=aw+b+1$을 구했으면	3
	$a=0$, $b=-1$을 구했으면 (각각 2점씩)	4
4	$-1\le[x^2-2x]<0$을 구했으면	6
	$-1\le[x^2-2x]$은 모든 실수 x에 대하여 성립함을 보였으면	3
	$[x^2-2x]<0$로부터 $0<x<2$를 구했으면	3
	$x=1$을 구했으면	2

■ 예시 답안

[1] $g(n)=f(n-k)=\sqrt{n-k+2}+\sqrt{n-k+1}$이다. 그런데

$$\frac{2}{g(n)}=\frac{2}{\sqrt{n-k+2}+\sqrt{n-k+1}}=\frac{2(\sqrt{n-k+2}-\sqrt{n-k+1})}{(\sqrt{n-k+2}+\sqrt{n-k+1})(\sqrt{n-k+2}-\sqrt{n-k+1})}$$

$=2(\sqrt{n-k+2}-\sqrt{n-k+1})$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2018}\frac{2}{g(n)}=\sum_{n=1}^{2018}2(\sqrt{n-k+2}-\sqrt{n-k+1})=2(\sqrt{2020-k}-\sqrt{2-k})$이다.

[2] (1) $(f\circ f)(x)=1-\frac{1}{x}$, $(f\circ f\circ f)(x)=x$, $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=f(x)$, $\cdots$ 이므로 $g(x)=x$이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{1-x}}{x}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x(1-x)}=-\frac{1}{6}$이다.

(2) $n=3t$ 또는 $n=3t+1$ 또는 $n=3t+2$인 정수 t가 존재한다. 만일 $n=3t$이면 $h(x)=x$이다. 만일 $n=3t+1$이면 $h(x)=\frac{1}{1-x}$이다. 따라서, $n=3t+2$인 정수 t가 존재한다.

[3] $f(w)=q(w)g(w)=0$이고 $w^3=1$이므로 $f(w)=aw^{52}+bw^{27}+1=aw+b+1=0$이다. 그런데 $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $w=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$이고 a와 b는 실수이므로 $a=0$이고 $b=-1$이다.

[4] $[f(x)]=[x^2-2x]-3$, $[g(x)]=[x^2-2x]-5$이므로 $2[x^2-2x]-5=[x^2-2x]-6$이다. 따라서 $[x^2-2x]=-1$이고 $-1\le[x^2-2x]<0$이다. 부등식 $-1\le[x^2-2x]$로부터 $[x^2-2x+1]\ge0$이다. 그런데 모든 x에 대하여 $x^2-2x+1\ge0$이므로, 부등식 $-1\le[x^2-2x]$은 모든 실수 x에 대하여 성립한다. 또한 $[x^2-2x]<0$으로부터 $x^2-2x<0$이고 $x(x-2)<0$이므로 $0<x<2$이다. 그러므로 주어진 방정식을 만족시키는 정수 x는 $x=1$이다.