

자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 실수 a 에 대하여 $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대의 정수이다.
2. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근은 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 이다.
3. 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라고 하면 $A = BQ + R$ (단, R 의 차수는 B 의 차수보다 낮다.) 특히, $R = 0$, 즉, $A = BQ$ 일 때, A 는 B 로 나누어떨어진다고 한다.
4. 세 집합 X, W, Y 에 대하여 두 함수 $f: X \rightarrow W, g: W \rightarrow Y$ 의 합성함수 $g \circ f$ 는 $g \circ f: X \rightarrow Y, (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 이다.
5. 집합 X 와 함수 $f: X \rightarrow X$ 에 대하여 $f \circ f$ 는 f 를 두 번 합성한 함수, $f \circ f \circ f$ 는 f 를 세 번 합성한 함수를 나타낸다.

[1] 모든 자연수에서 정의된 함수 $f(n) = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 음의 정수 k 만큼 평행이동시켰을 때 얻는 함수를 $g(n)$ 이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{2018} \frac{2}{g(n)}$ 를 구하시오. [10점]

[2] 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) k 가 자연수일 때 f 를 $3k$ 번 합성한 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 이때 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ 를 구하시오. [9점]

(2) n 이 자연수일 때 f 를 n 번 합성한 함수를 $h(x)$ 라고 할 때 $h(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 이면 $n = 3t + 2$ 인 정수 t 가 존재함을 설명하시오. [7점]

[3] 다항식 $g(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $g(x) = 0$ 의 하나의 허근을 w 라고 하자. 다항식 $f(x) = ax^{52} + bx^{27} + 1$ 가 $g(x)$ 로 나누어떨어진다고 가정할 때, 즉, $f(x) = q(x)g(x)$ 인 다항식 $q(x)$ 가 존재할 때, 실수 a 와 b 를 구하시오. [10점]

[4] 두 다항식 $f(x) = x^2 - 2x - 3, g(x) = x^2 - 2x - 5$ 에 대하여 방정식 $2[f(x)] + 1 = [g(x)] - 1$

을 만족시키는 정수 x 를 모두 구하시오. [14점]