자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 모든 자연수들의 집합을 $\mathbb{N}$, 모든 정수들의 집합을 $\mathbb{Z}$, 모든 유리수들의 집합을 $\mathbb{Q}$, 모든 실수들의 집합을 $\mathbb{R}$로 나타낸다.

2. 내용이 참인지 거짓인지를 분명히 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 한다.

3. p, q가 문장이나 식일 때, 'p이면 q이다.' 꼴의 명제에서 p를 가정, q를 결론이라 하고, 명제 'p이면 q이다.'를 기호 $p \to q$로 나타낸다.

4. 변수를 포함하는 문장이나 식이 변수의 값에 따라 참, 거짓이 정해질 때, 그 문장이나 식을 조건이라고 한다.

5. 전체집합의 원소 중에서 조건을 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 그 조건의 진리집합이라고 한다.

6. $a,b,m \in \mathbb{Q}$이고 $\sqrt{m} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$일 때 $a+b\sqrt{m}=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

7. $n \in \mathbb{N}$을 $m \in \mathbb{N}$으로 나누었을 때 몫을 q, 나머지를 r이라고 하면 $n=mq+r$이다.

8. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 필요충분조건은 $b^2-4ac>0$이다.

[1] 함수 $f:\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$는 $n \in \mathbb{N}$을 12로 나눈 나머지를 $f(n)$에 대응시키는 함수이다. 함수 f가 $a,b \in \mathbb{N}$에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때 $f(2a+b^2)$의 값을 구하시오.[10점]

$$f(a)>f(b)\text{이고}\quad f(a)f(b)-1=f(a)+f(b).$$

[2] 집합 $X=\{-2,-1,0,1,2\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(1) $a,b,c \in X$에 대하여 $a+b\sqrt{3}+c\sqrt{7}=0$일 때 $a+b+c$의 값을 구하시오. [10점]
(2) A는 집합 X의 공집합이 아닌 부분집합이고 명제 '$a,b \in A \to a-b \in A$.'를 만족시킨다. 이때 집합 A를 구하시오. [12점]

[3] $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의할 때 물음에 답하시오.

$$f(x)=x^2-4x-32,\quad g(x)=x^2-2ax+a-2 \qquad (1 \le a < 2)$$

(1) $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 모두 x축과 서로 다른 두 점에서 만남을 보이시오. [6점]
(2) 조건 '$p: f(x)g(x) \le 0$'의 진리집합에 속하는 모든 구간의 길이의 합을 L이라 할 때 L을 구하시오. [12점]

■ 출제 의도

[1] 주어진 식을 인수분해 하는 계산 능력과 함수에 대한 이해력을 평가한다.

[2] (1) 무리수가 포함된 항등식에 대한 이해력과 계산능력을 평가한다.

(2) 명제의 진리집합을 구체적으로 구하는 논리력과 응용력을 평가한다.

[3] (1) 이차함수의 판별식에 대한 이해력과 계산능력을 평가한다.

(2) 이차함수의 그래프 개형에 대한 이해력과 부등식 $f(x)g(x) \le 0$의 의미에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다.

■ 문항 해설

집합, 명제 및 함수 등의 개념은 인문학과 자연과학을 포함한 모든 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념이다. 이러한 개념들을 이해하고 다음과 같은 과정을 통해 해결할 수 있는 문항이라고 할 수 있다.

1. 주어진 간단한 식을 인수분해 해서 답을 유도할 수 있는 문항이다.

2. (1) 무리수가 포한된 항등식에서 실수와 무리수의 관계를 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.

(2) 주어진 명제를 이해하고 집합 A에 속하는 원소를 구체적으로 검증함으로써 해결할 수 있도록 구성된 문항이다.

3. (1) 이차함수의 판별식을 이해함으로써 간단히 계산할 수 있는 문항이다.

(2) 이차함수의 그래프개형에 대한 이해를 기반으로 간단한 계산을 통해 답을 구할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

문항번호	채점 기준	배점
1	$f(a)=3$, $f(b)=2$을 구했으면	5
	$f(2a+b^2)=10$을 구했으면	5
2-1	$a^2-3b^2-7c^2=0$, $2bc=0$을 구했으면	5
	$a+b+c=0$를 구했으면	5
2-2	$a\in A,\ a\neq 0$에 대하여 $-a\in A$임을 보였으면	3
	$a\in A,\ a\neq 0$일 때 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $na\in A$임을 보였으면	5
	$A=\{0\}$임을 보였으면	4
3-1	$f(x)$의 판별식 $16+128=144>0$을 보였으면	3
	$g(x)$의 판별식 $4a^2-4a+8>0$을 보였으면	3
3-2	$f(x)=0$을 만족시키는 x값 $-4, 8$을 구했으면	2
	$g(x)=0$을 만족시키는 x값 $a-\sqrt{a^2-a+2}$, $a+\sqrt{a^2-a+2}$을 구했으면	2
	진리집합에 속하는 구간 $[-4, a-\sqrt{a^2-a+2}\,]\cup[\,a+\sqrt{a^2-a+2}\,, 8]$을 구했으면	6
	$L=12-2\sqrt{a^2-a+2}$을 구했으면	2

■ 예시 답안

[1] $f(a)f(b)-f(a)-f(b)+1=2$이므로 $(f(a)-1)(f(b)-1)=2$이다. 그런데 $f(a)\geq 0$이고 $f(b)\geq 0$이므로 다음과 같은 두 가지 경우가 성립한다.

(1) $f(a)=2$이고 $f(b)=3$.

(2) $f(a)=3$이고 $f(b)=2$.

조건에서 $f(a)>f(b)$이므로 $f(a)=3$이고 $f(b)=2$이다. 따라서 $a=12s+3, b=12t+2$인 s,t가 존재한다. 그런데

$$2a+b^2=2(12s+3)+(12t+2)^2=12(2s+12t^2+4t)+10$$

이므로 $f(2a+b^2)=10$ 이다.

[2] (1) $a+b\sqrt{3}+c\sqrt{7}=0$이므로 $a^2=(b\sqrt{3}+c\sqrt{7})^2=3b^2+7c^2+2bc\sqrt{21}$ 이다. 따라서 $a^2-3b^2-7c^2-2bc\sqrt{21}=0$이므로 $a^2-3b^2-7c^2=0$이고 $2bc=0$이다. $bc=0$이므로 $b=0$ 또는 $c=0$이다. 만일 $b=0$이면 $a+c\sqrt{7}=0$이므로 $a=0$이고 $c=0$이다. 만일 $c=0$이면 $a+b\sqrt{3}=0$이므로 $a=0$이고 $b=0$이다. 그러므로 $a+b+c=0$이다.

(2) $a\in A, a\neq 0$이라면 $a-a\in A$이므로 $0\in A$이다. 또한 $0-a\in A$이므로 $-a\in A$이고 $a-(-a)\in A$이므로 $2a\in A$이다. 이와 같은 방법으로 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $na\in A$이므로 집합 A는 무한집합이다. 그런데 A는 X의 부분집합이므로 모순이 되어 $a\neq 0$이면 $a\notin A$이다. 만일 $A=\{0\}$이면 명제 '$a,b\in A \rightarrow a-b\in A$.'가 참이므로 $A=\{0\}$이다.

[3] (1) $f(x)$의 판별식은 $16+128=144>0$이다. 또한 $g(x)$의 판별식은 $4a^2-4a+8=4(a-\frac{1}{2})^2+7>0$이다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 모두 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $f(x)=0$을 만족시키는 x값은 $-4,8$이고 $g(x)=0$을 만족시키는 x값은 $a-\sqrt{a^2-a+2}$, $a+\sqrt{a^2-a+2}$이다. 그런데, $1\leq a<2$이므로 $-4<a-\sqrt{a^2-a+2}<a+\sqrt{a^2-a+2}<8$ 이다. 또한 $f(x)$와 $g(x)$의 이차항의 계수가 양수이고 $f(0)<0,\ g(0)<0$이므로 조건 $p: f(x)g(x)\leq 0$의 진리집합에 속하는 모든 구간은 $[-4, a-\sqrt{a^2-a+2}]\cup[a+\sqrt{a^2-a+2}, 8]$이다. 그러므로 $L=8-(a+\sqrt{a^2-a+2})+(a-\sqrt{a^2-a+2})-(-4)=12-2\sqrt{a^2-a+2}$ 이다.

자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수의 증가와 감소
함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분 가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여
㉠ $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
㉡ $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

2. 미적분의 기본 정리
함수 $f(t)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

3. 적분과 미분의 관계
함수 $f(t)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

4. 사이값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k \quad (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

5. 합성함수의 미분법
미분 가능한 두 함수 $y=f(u),\ u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

6. 곡선의 오목과 볼록
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
㉠ $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다.
㉡ $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다.

7. 모든 실수 t에 대하여 다음이 성립한다.

$$|\sin t| \le |t|$$

8. 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 이 구간에서 $f(x)\le g(x)$일 때,
다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

구간 $(-\infty,\infty)$에서 정의된 두 함수 $F(x)$, $G(x)$는 다음과 같다.

$$F(x)=\int_0^x (t^3+4t+1-\sin t^3)\,dt,\quad G(x)=F(x^2)-1$$

이 두 함수에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[1]

(1) $F(1)-F(-1)$의 값을 구하시오. [10점]

(2) 제시문 7을 이용하여 다음이 성립함을 보이시오. [10점]

$3 \le F(1) \le 3.5$

(3) [1]-(2)의 결과를 이용하여 방정식 $F(x)=2.99$를 만족시키는 근이 0과 1사이에 있음을 보이시오. [10점]

[2]

(1) 함수 $G(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가함을 보이시오. [8점]

(2) 함수 $G(x)$의 극값을 구하시오. [4점]

(3) 곡선 $y=G(x)$의 오목과 볼록을 조사하시오. [8점]

■ 출제 의도

[1]

(1) 적분의 여러 가지 성질을 이용하여 함수의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(2) 정적분 계산 및 정적분의 성질을 이용하여 함수의 크기를 측정하는 문제이다.

(3) 정적분의 성질 및 사이값정리를 이용하여 방정식의 근의 존재성을 아는 지를 평가하는 문제이다.

[2]

(1) 적분형태로 표현된 함수의 도함수 및 합성함수의 도함수를 구할 수 있는지를 평가하고 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 아는 지를 평가하는 문제이다.

(2) 함수의 미분 및 증감을 사용하여 극값을 구할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

(3) 주어진 함수의 이계도함수를 구하고 이계도함수의 부호와 함수의 그래프의 오목, 볼록과의 관계를 사용할 수 있는 지를 측정하는 문제이다.

■ 문항 해설

함수 및 미분 적분학은 자연과학을 포함한 많은 분야에서 유용하게 활용되고 있는 수학적 개념이다. 그 중 연속 함수의 성질, 함수의 증가와 감소, 사이값 정리, 합성함수의 미분법, 극값, 곡선의 오목과 볼록, 삼각함수의 미분법, 미적분학의 기본정리, 다항함수의 미분 및 적분 등 미적분학에서 기본의 되는 개념들을 잘 이해하면 해결할 수 있는 문항들을 다루었다.

■ 채점 기준

문항번호	채점 기준	배점
[1]-(1)	$F(1)=\int_0^1 (t^3+4t+1-\sin(t^3))\,dt,\ F(-1)=-\int_{-1}^0 (t^3+4t+1-\sin(t^3))\,dt$	4
	$F(1)-F(-1)=\int_{-1}^1 (t^3+4t+1-\sin(t^3))\,dt=2\int_0^1 1\,dt=2$	6
[1]-(2)	$0\le t\le 1$이면 $-t\le \sin t\le t$이므로 $-t^3\le -\sin(t^3)\le t^3$	2
	$3=\int_0^1 (4t+1)\,dt\le F(1)\le \int_0^1 (2t^3+4t+1)\,dt=3.5$(각 등호 부등호 2점씩)	8
[1]-(3)	$F(0)=0$	3
	[1]-(2)에 의하여 $F(1)\ge 3$이므로 $F(0)<2.99<F(1)$이다.	4
	제시문 4.에 의하여 방정식 $F(x)=2.99$의 근이 0과 1사이에 적어도 한 개 존재한다.	3
[2]-(1)	$F'(x)=x^3+4x+1-\sin(x^3)$.	2
	$G'(x)=2xF'(x^2)=2x\left(x^6+4x^2+1-\sin(x^6)\right)$ $x>0,\ 1-\sin(x^6)\ge 0$이므로 $G'(x)>0$ 따라서 $G(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.	6
[2]-(2)	$x<0$이면 $G'(x)<0$이고 $x>0$이면 $G'(x)>0$이므로	2
	함수 $G(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $G(0)=F(0)-1=-1$을 갖는다.	2
[2]-(3)	$G''(x)=2F'(x^2)+4x^2F''(x^2)$	6
	$=2\left(x^6+4x^2+1-\sin(x^6)\right)+4x^2\left(4+3x^4(1-\cos(x^6))\right)>0$	
	곡선 $y=G(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 아래로 볼록(위로 오목)하다.	2

■ 예시 답안

[1]

(1) $$F(1)=\int_0^1 (t^3+4t+1-\sin(t^3))\,dt,$$

$$F(-1)=-\int_{-1}^0 (t^3+4t+1-\sin(t^3))\,dt$$

세 함수 t^3, $4t$, $\sin(t^3)$의 그래프는 모두 원점에 대칭이므로 다음이 성립한다.

$$F(1)-F(-1)=\int_{-1}^1 (t^3+4t+1-\sin(t^3))\,dt=2\int_0^1 1\,dt=2$$

(2) 제시문 7에 의하여 $0\le t\le 1$이면 $-t\le \sin t\le t$이므로 $-t^3\le -\sin(t^3)\le t^3$이다.
따라서 제시문 8에 의하여 다음이 성립한다.

$$3=\int_0^1 (4t+1)\,dt\le F(1)\le \int_0^1 (2t^3+4t+1)\,dt=3.5$$

(3) $F(0)=0$이고 [1]-(2)에 의하여 $F(1)\ge 3$이므로 다음이 성립한다.

$$F(0)<2.99<F(1)$$

그러므로 사이값정리에 의하여 방정식 $F(x)=2.99$의 근이 0과 1사이에 적어도 한 개 존재한다.

[2]

(1) $F'(x)=x^3+4x+1-\sin(x^3)$이다. $x>0$, $1-\sin(x^6)\ge 0$이므로
합성함수의 미분법에 의하여 다음이 성립한다.

$$G'(x)=2xF'(x^2)=2x\left(x^6+4x^2+1-\sin(x^6)\right)>0$$

따라서 함수 $G(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

(2) $x<0$이면 $G'(x)<0$이고 $x>0$이면 $G'(x)>0$이므로
함수 $G(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $G(0)=F(0)-1=-1$을 갖는다.

(3) 구간 $(-\infty,\infty)$에서

$$\begin{aligned}G''(x)&=2F'(x^2)+4x^2F''(x^2)\\&=2\left(x^6+4x^2+1-\sin(x^6)\right)+4x^2\left(4+3x^4(1-\cos(x^6))\right)>0\end{aligned}$$ 이다.

따라서 곡선 $y=G(x)$은 구간 $(-\infty,\infty)$에서 아래로 볼록(위로 오목)이다.