[문제 1]

▣ 출제의도

[1] 원소의 개수가 2인 두 집합의 등식에 대한 이해력과 계산능력을 평가한다.
[2] 명제를 이해하는 이해력과 명제의 진리집합을 구체적으로 구하는 논리력을 평가한다.
[3] (1) 일대일함수에 대한 이해력을 평가한다.
(2) 일대일함수, 역함수, 합성함수에 대한 이해력을 평가한다.
(3) 함수에 대한 이해력 및 이차함수의 그래프 개형에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다.

▣ 문항별 배점

[1] 8점
[2] 16점
[3] (1) 7점 (2) 6점 (3) 13점

▣ 참고자료

[1] 수학 II, 이준열 외, 천재교육, 2016
[2] 수학 II, 류희찬 외, 천재교과서, 2016
[3] 수학 II, 신항균 외, 지학사, 2016
[4] 수학 II, 황선욱 외, 좋은책 신사고, 2016

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$t=2t^2-t-4$인 이유를 설명했으면	4
	$t=2$를 구했으면	4
1-2	$A\subset\{-1,0,1\}$인 이유를 설명했으면	8
	$A=\{0\}$, $A=\{1\}$, $A=\{0,1\}$, $A=\{-1,1\}$, $A=\{-1,0,1\}$임을 구했으면 (각각의 경우에 2점씩 감점)	8
1-3-1	개수만(6개) 구했으면	3
	$f(1)=1$일 때 2가지, $f(1)=2$일 때 2가지, $f(1)=3$일 때 2가지임을 설명했으면 (세 경우 모두 설명하지 않았으면 한 경우에 1점씩 감점)	4
1-3-2	$f^{-1}(2)=3$이고 $f^{-1}(3)=1$을 구했으면 (한 경우만 구했으면 1점 감점)	3
	$(f^{-1}\circ f^{-1})(2)=1$을 구했으면	3
1-3-3	$b^2-4ac>0$인 이유를 설명했으면	4

광운대학교 KwangWoon University

	$a=1,\ b=3,\ c=2$ 또는 $a=2,\ b=3,\ c=1$을 구했으면 (한 경우만 구했으면 3점 감점)	6
	$b-ac=1$을 구했으면	3

▣ 모범답안

[1] $t \neq t+1$이므로 $t=2t^2-t-4$이다. 따라서 $t=-1$ 또는 $t=2$이다. $t=-1$이면 $3=t+1$를 만족하지 않으므로 $t=2$이다. 또한 $t=2$는 $3=t+1$를 만족시킨다. 그러므로 $t=2$이다.

[2] $a \in A$이라고 하자. 만일 $a \notin \{-1,0,1\}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a^{2^{n-1}} \in A$이고 $a^{2^n}-a^{2^{n-1}}=a^{2^{n-1}}(a^{2^{n-1}}-1)>0$이므로 $a^{2^{n-1}}<a^{2^n}$이다. 따라서 A가 유한집합이 아니므로 가정에 모순이다. 그러므로 $A \subset \{-1,0,1\}$이다. 그런데 집합 $\{-1,0,1\}$의 부분집합은 모두 8개이고 그 중 $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{-1,0\}$ 등 3가지 경우는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 이 경우들을 제외한 다음과 같은 5가지의 경우가 주어진 명제를 만족시키는 집합 A이다.

$$A=\{0\},\ A=\{1\},\ A=\{0,1\},\ A=\{-1,1\},\ A=\{-1,0,1\}$$

[3] (1) 함수 $f: X \rightarrow X$가 일대일함수이면

(i) $f(1)=1$일 때 $f(2)=2$ 또는 $f(2)=3$이고 각각의 경우에 $f(3)$는 유일하게 결정되므로 2가지 존재한다.

(ii) $f(1)=2$일 때 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=3$이고 각각의 경우에 $f(3)$는 유일하게 결정되므로 2가지 존재한다.

(iii) $f(1)=3$일 때 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=2$이고 각각의 경우에 $f(3)$는 유일하게 결정되므로 2가지 존재한다.

그러므로 집합 X에서 X로의 일대일함수는 모두 6개 존재한다.

(2) $f(1)=3$이고 $f(2)=1$이므로 $f(3)=2$이다. 따라서 $f^{-1}(2)=3$이고 $f^{-1}(3)=1$이다. 그러므로

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))=f^{-1}(3)=1$$

이다. 따라서 $(f^{-1} \circ f^{-1})(2)=1$이다.

(3) 함수 $h(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로$b^2-4ac>0$이다. 그런데 a,b,c는 각각 1 또는 2 또는 3이므로 이 부등식을 만족시키는 a,b,c의 값은 다음과 같다.

$$a=1,\ b=3,\ c=2 \quad \text{또는} \quad a=2,\ b=3,\ c=1$$

두 가지 경우 모두 $b=3$, $ac=2$이므로 $b-ac=1$이다.

[문제 2]

▣ 출제의도

본 문제는 함수의 연속과 미분에 관한 정의를 엄밀히 이해하고 주어진 문제에 해당 개념을 적용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1] 미분의 개념을 활용하여 속도에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.
[2] 좌극한과 우극한을 각각 계산하여 함수의 연속을 판별할 수 있는지 평가하는 문제이다.
[3] 적분 구간에 대한 정적분의 성질을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.
[4] 주어진 조건을 올바르게 활용하여 미분 가능함을 보일 수 있는지 평가하는 문제이다.

▣ 문항별 배점

[1] 6점
[2] 10점
[3] 14점
[4] (1) 3점 (2) 8점 (3) 6점 (4) 3점

▣ 참고자료

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미분법 I	김창동 외	교학사	2014	73-140
	미분법 I	정상권 외	금성출판사	2014	94-193
	미분법 I	신항균 외	지학사	2014	55-68
	미분법 I	김원경 외	비상교육	2014	80-171

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	속도 $\frac{dx}{dt} = -3t^2 + 30t$를 올바로 구한다.	4
	속도를 인수분해하여 정답 $t = 10$을 얻는다.	2
[2]	$\lim_{x \to 1-} f(x) = b$을 얻는다.	3
	$\lim_{x \to 1+} f(x) = a$을 얻는다.	4
	연속인 조건을 활용하여 $a = 1$, $b = 1$을 얻는다.	3
[3]	$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ 을 얻는다.	5

	$S(k)=\int_0^{\frac{k}{2}}(k-2x)\,dx+\int_{\frac{k}{2}}^{1}(2x-k)\,dx$을 얻는다.	3
	정적분의 계산을 통해 $S(k)=\frac{k^2}{2}-k+1$을 얻는다.	3
	$k=1\ (0\le k\le 2)$일 때 $S(k)$의 최솟값 $\frac{1}{2}$을 얻는다.	3
[4]-(1)	$f(0)=f(0)+f(0)$ 또는 $\lvert f(0)\rvert\le 0$을 통해 $f(0)=0$임을 보인다.	3
[4]-(2)	제시문 4를 활용하여 $-\lvert h\rvert\le\frac{f(h)}{h}\le\lvert h\rvert$을 얻는다.	4
	$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$이므로 $f(x)$는 0에서 미분가능하다는 결론을 도출한다.	4
[4]-(3)	$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=0$임을 얻는다.	4
	$f'(x)$가 존재하므로 모든 실수 x에 대해 미분가능하다고 결론짓는다.	2
[4]-(4)	모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로 제시문 6을 활용하여 $f(x)=0$임을 도출한다.	3

▣ 모범답안

[1] 운동 방향이 바뀌는 시각의 속도는 0이다.

$v(t)=-3t^2+30t=-3t(t-10)=0$이다. $t>0$이므로 $t=10$이다.

[2] $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $\lim_{x\to 1-}f(x)=b$

$x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+3}-x^2+x+b}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^3-\frac{x^2}{x^n}+\frac{x}{x^n}+\frac{b}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=ax^3$$

따라서 $\lim_{x\to 1+}f(x)=a$이다. $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $a=b$이고 $f(1)=\frac{a}{b}=1$ 이므로 $a=1,\ b=1$

[3] $S(k)=\int_0^{\frac{k}{2}}(k-2x)\,dx+\int_{\frac{k}{2}}^{1}(2x-k)\,dx$

$$=\left[kx-x^2\right]_0^{\frac{k}{2}}+\left[x^2-kx\right]_{\frac{k}{2}}^{1}$$

$$=\frac{k^2}{2}-k+1$$

광운대학교 KwangWoon University

따라서 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$ 또한 $S(k)=\frac{1}{2}(k^2-2k+2)=\frac{1}{2}(k-1)^2+\frac{1}{2}$이므로

$S(k)$의 최솟값은 $k=1$ $(0 \le k \le 2)$일 때 $\frac{1}{2}$이다.

[4] (1) $f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$이다.
(또는 $|f(0)| \le 0$이므로 $f(0)=0$이다.)

(2) $|f(x)| \le x^2$이므로 $\left|\frac{f(h)}{h}\right| \le \frac{h^2}{|h|}=|h|$ 즉, $-|h| \le \frac{f(h)}{h} \le |h|$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$이고 $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$이므로 $f(x)$는 0에서 미분 가능하다.

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=0$

따라서 $f(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하다.

(4) 모든 실수 x에 대해 $f'(x)=0$이므로 $f(x)$는 상수함수이다. 그런데 $f(0)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.

광운대학교
KwangWoon University