<자연계열>

2017학년도 신입학 수시모집
논술 모의평가 문제지 (자연계열)

수험번호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(50점)

(1) 자연수 a와 자연수 b에 대하여 자연수 q가 존재하여 $a=bq$이면 a를 b의 배수, b를 a의 약수라 한다.

(2) 자연수 a와 자연수 b의 공약수 중에서 가장 큰 수를 자연수 a와 자연수 b의 최대공약수라 한다.

(3) 자연수 a와 자연수 b에 대하여 $a=bq+r$, $0 \le r < b$를 만족시키는 q와 r이 존재한다. 이때 q를 a를 b로 나누었을 때의 몫, r를 나머지라고 한다.

(4) 다항식 A를 다항식 $B\,(B \neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면
$A=BQ+R$가 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

(5) (수학적 귀납법) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
  (1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
  (2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
    $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[1] 임의의 자연수 n에 대하여 $a=2^n \times 3^{2n}-1$이 17의 배수임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.(10점)

[2] 자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때 몫 q_1, q_2와 나머지 r_1, r_2가 존재하여 $a=bq_1+r_1=bq_2+r_2$가 성립한다고 한다. 그러면 $q_1=q_2$이고 $r_1=r_2$임을 증명하시오.(10점)

[3] 함수 $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 다음과 같이 정의하자. ($\mathbb{N}$은 모든 자연수의 집합이다.)

$$a \in \mathbb{N} \text{에 대하여 } f(a)=k \ (k\text{는 } a\text{와 } 2\text{의 최대공약수})$$

(1) 함수 f가 다음 성질을 만족하는지 판정하고 이유를 설명하시오.(3점)

$$\text{모든 } a, b \in \mathbb{N} \text{에 대하여 } f(ab)=f(a)f(b)\text{이다.}$$

(2) $f(a)=1$이고 $f(b)=1$인 a와 b에 대하여 $f(ab)=f(a)f(b)$가 성립함을 증명하시오.(6점)

[4] 실수 a, b에 대하여 두 다항식을 $f(x)=ax^{2016}+bx^{523}-6$, $g(x)=x^2+x+1$라 놓으면 제시문(4)에 의하여 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$를 만족하는 다항식 $q(x)$와 $r(x)$가 존재한다. $r(x)=0$일 때 ab를 구하시오.(9점)

[5] 다항식 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{N})$에 대하여 집합 X와 집합 Y를 다음과 같이 정의하자.

$$X=\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)+g(x)=0\}, \quad Y=\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)g(x)=0\}$$

$X=\{2, k\}$, $Y=\{2, 3, 8\}$일 때 k를 구하시오. ($\mathbb{R}$는 모든 실수의 집합이고 $\mathbb{N}$은 모든 자연수의 집합이다)
(12점)

<다음 장에 계속>

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 문항 별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

(가) 어떤 구간 I에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 $f''(x)=g(x)$을 만족시키는 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$는 부정적분을 반복적으로 구하여 찾을 수 있다. 먼저, 이계도함수 $f''(x)$는 함수 $f'(x)$의 도함수, 즉 $\frac{d}{dx}f'(x)=f''(x)$이므로 부정적분의 정의에 의해 $f'(x)$는 함수 $f''(x)=g(x)$의 부정적분이다. 그리고 또한 함수 $g(x)=f''(x)$의 부정적분 $F(x)$는 다음과 같다.

$$F(x)=\int g(x)\,dx+C_0,\quad C_0\text{은 적분상수}$$

여기서 $f'(x)$와 $F(x)$의 도함수가 모두 $g(x)=f''(x)$로 같으므로 다음이 성립한다.

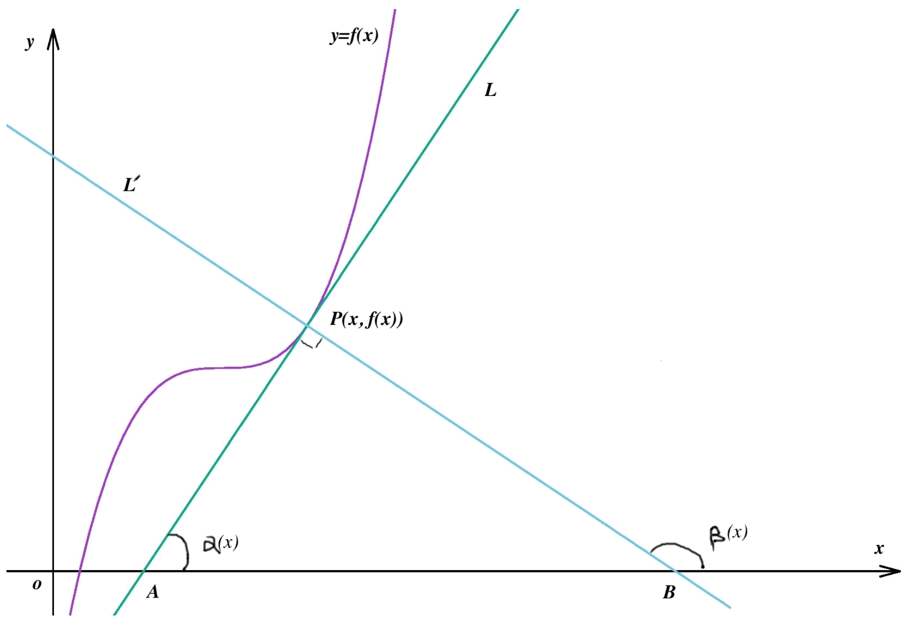
$$f'(x)=F(x)+C_1,\quad C_1\text{은 상수}$$

이로부터 함수 $y=f(x)$는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$f(x)=\int (F(x)+C_1)\,dx+C_2,\quad C_2\text{는 적분상수}$$

(나) 함수 $y=f(x)$가 구간 I에서 미분가능하다고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(x,f(x))$, $x\in I$에서의 접선 L이 x축과 만나는 경우, 두 직선의 이루는 각의 크기를 양의 x축으로부터 시곗바늘이 도는 방향의 반대 방향으로 재고 $\alpha(x)$ (라디안)라 하자. 또 같은 점 $P(x,f(x))$를 지나고 직선 L에 수직인 직선 L'이 x축과 이루는 각의 크기도 같은 방법으로 재고 그 크기를 $\beta(x)$ (라디안)로 나타내기로 하자. 점 $P(x,f(x))$에서의 접선 L이 x축과 만나지 않는, 즉 평행한 경우에는 $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=\frac{\pi}{2}$로 정한다. 그러면 $0\le\alpha(x)<\pi$, $\alpha(x)\ne\frac{\pi}{2}$이고, 각 $\alpha(x)$가 예각일 경우는 $\beta(x)=\alpha(x)+\frac{\pi}{2}$이고, 각 $\alpha(x)$가 둔각이라면 $\alpha(x)=\beta(x)+\frac{\pi}{2}$의 관계가 성립한다. <그림 1>은 $\alpha(x)$가 예각인 경우의 한 예를 나타낸 것이다.

(※ 함수 $y=f(x)$가 이계도함수를 가지면 함수 $\alpha(x)$는 미분가능하다고 가정한다.)



<그림 1>

<다음 장에 계속>

[1] 제시문 (나)의 점 $P(x, f(x))$에서의 접선 L에 대하여

(1) $\alpha(x)$와 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$와의 관계식을 구하시오.(5점)

(2) $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$인 이유를 설명하시오.(2점)

[2] 함수 $y=f(x)$가 구간 I에서 미분가능하고 $f'(x) \neq 0$을 만족시킨다고 할 때, $\tan(\alpha(x)+\beta(x))$와 도함수 $f'(x)$의 관계식을 구하시오.(8점)

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 구간 I에서 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.(6점)

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = \frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2},\quad x \in I$$

(2) 함수 $f(x)=\ln(\sec x)$, $I=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\alpha(x)$를 구하시오.(5점)

[4] 구간 $I=(-\infty, \infty)$에서 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대한 다음 명제를 증명하시오.(12점)

함수 $y=f(x)$가 상수함수 또는 일차함수이면 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=0$, $x \in I$이고, 그 역도 성립한다.

[5] 함수 $f(x)=\sin x$, $I=[0, 2\pi]$에 대해 $g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)$라고 할 때, $g(x)$의 값이 최대가 되는 점 $x_M \in I$와 최소가 되는 점 $x_m \in I$를 찾고, x_M과 x_m에서의 $\alpha(x)$와 $\frac{d}{dx}\alpha(x)$의 값을 구하시오.(12점)

<끝>