2017학년도 광운대학교 논술우수자 전형 문제해설
[자연계열-오후]

[문제 1]

▣ 출제의도

[1] 도함수를 활용해 함수의 최댓값과 최솟값을 구하고 부등식에 활용할 수 있는지 평가한다.
[2] 타원의 방정식을 구하고 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용해 구할 수 있는지 평가한다.
[3] 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구하고 조건을 만족하는 직선 위의 점을 구할 수 있는지 평가한다.
[4] 사이값 정리를 활용하여 주어진 구간에서 방정식이 근을 가짐을 보일 수 있는지 평가한다.
[5] 부분 적분법을 활용해 정적분 계산을 할 수 있는지 평가한다.

▣ 문항별 배점

[1] 10점
[2] 10점
[3] 10점
[4] 10점
[5] 10점

▣ 참고자료

[1] 미적분 II, 김원경 외, 비상교육, 2016, p.119
[2] 미적분 I, 신항균 외, ㈜지학사, 2016, p.174
[3] 기하와 벡터, 이준열 외, 천재교육, 2016, p.199
[4] 미적분 I, 신항균 외, ㈜지학사, 2016, p.75
[5] 미적분 II, 김원경 외, 비상교육, 2016, p.149

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$f'(x)$와 $f'(1)=0$을 구하면	5
	$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$, $\left\vert\frac{x}{1+x^2}\right\vert\le\frac{1}{2}$을 구하면	5
1-2	$\frac{x^2}{4}+y^2=1$와 넓이 S를 구하면	5
	계산 한 적분값을 구하면	5
1-3	H의 좌표 $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$을 구하면	5
	OH의 길이는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$을 구하면	5
1-4	$g(x)=f(x)-x-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$을 정의하면	5
	양끝점에서 부호가 다름을 보이고 결론을 유도하면	5
1-5	부분 적분법을 올바로 한번 적용하면	5
	부분 적분법을 올바로 두 번 적용하고 답이 맞으면	5

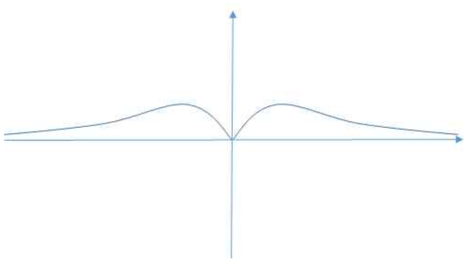
▣ 모범답안

[1] $f(x)=\left\vert\frac{x}{1+x^2}\right\vert$라고 하면 이 함수는 y축 대칭이다. 따라서 $x>0$에서 함수의 증감표를 그려보자.

$x>0$이면 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$이고 $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$이므로 $f'(1)=0$이다.

또 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$이고 $f(0)=0$이므로 다음을 얻는다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	증가	$\frac{1}{2}$극대	감소



$\left\vert\frac{x}{1+x^2}\right\vert\le\frac{1}{2}$이므로 p의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이다.

[2] 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$이다. 따라서 곡선의 식은 $y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, $(-2\le x\le 2)$이므로 빗금친 부분의 넓이

$S=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx=4\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$이다.

$x=2\cos\theta$ $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$로 치환하면 $dx=-2\sin\theta\,d\theta$이다. 또한

적분구간은 $2\cos\theta=0$, $2\cos\theta=\sqrt{3}$로부터 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$이다. 따라서

$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(-2\sin^2\theta)\,d\theta=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$이다.

[3] 직선 OB의 방향 벡터 $\overrightarrow{OB}$는 $(-1,2,1)$이므로 직선 OB위의 점 H의 좌표를 $(-t,2t,t)$라 하자. 직선 AH의 방향 벡터 $\overrightarrow{AH}=(-t-2,2t-3,t)$와 $\overrightarrow{OB}$는 수직이어야 하므로 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=6t-4=0$이다. 따라서 $t=\frac{2}{3}$이고 점 H의 좌표는 $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$이다. 따라서 선분 $\overline{OH}$의 길이는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

[4] $g(x)=f(x)-x-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$로 정의하자. $g(-1)=f(-1)+1>0$이고 $g(1)=f(1)-1<0$이므로 사이값 정리에 의해 $g(c)=f(c)-c-\cos\left(\frac{\pi}{2}c\right)=0$을 만족하는 c가 $(-1,1)$사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f(c)=c+\cos\left(\frac{\pi}{2}c\right)$인 c가 $(-1,1)$사이에 적어도 하나 존재한다.

[5] I_n에 부분 적분법을 적용하면

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n(-\cos x)'\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}nx^{n-1}(-\cos x)dx-\left[x^n\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-1}\cos x\,dx$이다.
(단, $n\ge 1$).
위 식에 부분 적분법을 적용하면

$I_n=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-1}(\sin x)'dx=-n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-2}\sin x\,dx+\left[nx^{n-1}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$이다. (단, $n\ge 2$).

여기서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-2}\sin x\,dx$는 I_{n-2}이고 $\left[nx^{n-1}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$이므로

$I_n+n(n-1)I_{n-2}=n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$을 얻는다. 여기에 $n=100$을 대입하면 정답은 $100\left(\frac{\pi}{2}\right)^{99}$이다.

[문제 2]

▣ 출제의도

[1] 다항식의 항등식에 대한 이해력을 평가하고 두 집합의 차집합을 구체적으로 구할 수 있는지를 평가한다.
[2] 나머지 정리를 이해하고 구체적인 함수에 대해 나머지 정리를 적용할 수 있는지를 평가한다.
[3] 다항식에 대한 나머지 정리에서 몫과 나머지가 유일하게 존재하는 것을 증명할 수 있는지를 평가한다.
[4] (1) 지수함수의 미분법을 이용하여 지수함수가 다항함수가 아님을 증명할 수 있는지를 평가한다.
(2) 수학적 귀납법을 이해함으로써 두 함수의 대소 관계를 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있는지를 평가한다.

▣ 문항별 배점

[1] 10점
[2] 12점
[3] 10점
[4] (1) 10점 (2) 8점

▣ 참고자료

[1] 수학 I, 류희찬 외, 천재교과서, 2016, p.31
수학 II, 이준열 외, 천재교육, 2016, p.21
[2] 수학 I, 우정호 외, 동아출판, 2016, p.19
[3] 수학 I, 김창동 외, 교학사, 2016, p.19
[4] 미적분 II, 황선욱 외, 좋은책신사고, 2016, p.34
수학 II, 류희찬 외, 천재교과서, 2016, p.159

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	집합 S를 구했으면	5
	차집합 $T-S$를 구했으면	5
2-2	등식 $f(x^2)=xf(x-2)+12$를 구했으면	2
	$f(x)$가 일차식 $f(x)=ax+b$임을 보였으면	5
	$f(x)=6x+12$를 구했으면	5
2-3	$B(Q_1-Q_2)=R_2-R_1$임을 보였으면	2
	$Q_1=Q_2$임을 보였으면	6
	$R_1=R_2$임을 보였으면	2
2-4-1	등식 $2^x\ln 2=a_1+2a_2x+3a_3x^2$을 구했으면	5
	$a_1=\ln 2$를 구했으면	3
	ln2는 정수가 아니므로 $g(x)\notin T$임을 보였으면	2
2-4-2	$f(1)=-3<2=g(1)$임을 보였으면	3
	$f(k+1)<g(k+1)$임을 보였으면	5

▣ 모범답안

[1] $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in S$라면 영이 아닌 정수 p가 존재하여 $f(x)=f(x+p)$이다.
따라서 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_0+a_1(x+p)+a_2(x+p)^2+a_3(x+p)^3$이다. 각항의 계수를 비교하면 다음과 같은 식을 얻는다.
$a_0+a_1p+a_2p^2+a_3p^3=a_0$, $a_1+2a_2p+3a_3p^2=a_1$, $a_2+3a_3p=a_2$.
그런데 $p\neq 0$이므로 $a_1=a_2=a_3=0$이다. 즉, $f(x)=a_0$이므로 S는 정수 전체의 집합이다. 따라서
$T-S=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in T \mid a_1,a_2,a_3$는 동시에 영은 아니다$\}$.

[2] 가정에 의하여 $f(x^2)=xf(x-2)+12$이다. 다항식 $f(x)$의 차수를 m이라 가정하면 $f(x^2)$의 차수는 $2m$이고 $xf(x-2)+12$의 차수는 $m+1$이다. 따라서 $2m=m+1$이고 $m=1$이므로 $f(x)$의 차수는 1이다. $f(x)=ax+b$라고 놓으면 $f(x^2)=ax^2+b$이고 $xf(x-2)+12=x\{a(x-2)+b\}+12=ax^2+(-2a+b)x+12$이다. 그러므로 $ax^2+b=ax^2+(-2a+b)x+12$이고 $(2a-b)x+b-12=0$이다. 따라서 $2a-b=0$, $b-12=0$이고 $a=6$, $b=12$이다. 즉, $f(x)=6x+12$이다.

[3] $A=BQ_1+R_1=BQ_2+R_2$이므로 $B(Q_1-Q_2)=R_2-R_1$이다. $Q_1\neq Q_2$라고 가정하자. R_1과 R_2의 차수는 B의 차수보다 낮으므로 R_2-R_1의 차수는 B의 차수보다 낮다. 그런데 $B(Q_1-Q_2)$의 차수는 B의 차수보다 낮지 않으므로 $B(Q_1-Q_2)$의 차수와 R_2-R_1의 차수는 같지 않다. 이는 모순이므로 $Q_1=Q_2$이다. 그러므로 $0=B(Q_1-Q_2)=R_2-R_1$이고 $R_1=R_2$이다.

[4] (1) $g(x) \in T$라 가정하면 적당한 정수 $a_i,\ i = 0,1,2,3$가 존재하여 $2^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$이다. 양변을 미분하면 $2^x \ln 2 = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$이다. $x = 0$을 대입하면 $a_1 = \ln 2$이다. 그런데 ln2는 정수가 아니므로 $g(x) \notin T$이다.

(2) (i) $n = 1$일 때 $f(1) = -3$이고 $g(1) = 2$이므로 $f(1) < g(1)$이 성립한다.
(ii) $n = k$일 때 $f(n) < g(n)$가 성립한다고 가정하자. 즉 $k^2 - k - 3 < 2^k$이라 가정하자. 그런데 $f(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) - 3 = (k^2 - k - 3) + 2k$이고 $g(k+1) = 2^{k+1} = 2^k + 2^k$이므로 가정에서 주어진 조건 $2k \le 2^k$을 이용하면 $f(k+1) < g(k+1)$이다. 따라서 $n = k+1$일 때에도 명제 $f(n) < g(n)$가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 명제가 증명된다.