2017학년도 광운대학교 논술우수자 전형 문제해설
[자연계열-오전]

[문제 1]

▣ 출제의도
[1] 매개변수로 나타난 이차도형의 관계식을 구하고 특정한 위치관계의 점의 좌표를 계산한다.
[2] 이차곡선의 접선의 방정식을 구하고 두 직선이 이루는 각의 크기를 계산한다.
[3] 같은 것이 포함된 경우의 수를 구하고 이를 통한 여사건의 확률을 계산한다.
[4] 이차도형에 내접하는 도형의 넓이를 함수로 표시하고 이차함수의 최댓값을 구한다.
[5] 좌표공간의 평면의 방정식을 구하고 두 평면이 이루는 각을 이해한다.

▣ 문항별 배점
[1] 8점
[2] 10점
[3] 8점
[4] 12점
[5] 12점

▣ 참고자료
[1] 기하와 벡터, 김원경 외, 비상교육, 2013년
[2] 기하와 벡터, 황선욱 외, 좋은책 신사고, 2014년
[3] 확률과 통계, 우정호 외, 동아출판, 2014년
[4] 미적분 II, 류희찬, 천재교과서, 2014년

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	매개변수 t를 소거하여 이차도형의 방정식을 표현	5
	함수식을 이용하여 y절편 2개를 모두 계산	3
[2]	타원의 접선 방정식 구하여 접점의 좌표를 계산	6
	접점을 지나는 두 직선이 이루는 각을 계산	4
[3]	순서와 관계없이 같은 것이 포함된 경우의 수 계산	5
	여사건의 경우의 수를 구하여 확률을 계산	3
[4]	매개변수 t를 이용하여 내접 도형의 넓이를 표현	6
	이차함수의 증감을 이용하여 함수의 최댓값을 계산	6
[5]	세 점을 지나는 평면의 방정식을 표현	6
	정사영의 넓이를 이용하여 두 평면이 이루는 각을 계산	6

▣ 모범답안

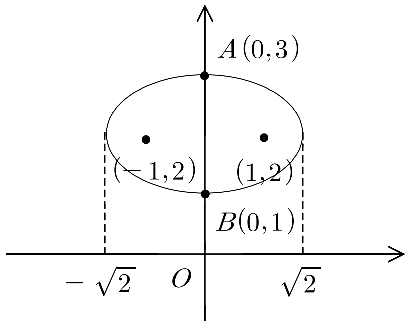
[1]

$\cos t = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin t = y-2$이므로 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$에서

$\dfrac{x^2}{2} + (y-2)^2 = 1$

y축과 만나는 점은 $x=0$에서

$A(0,3), B(0,1)$

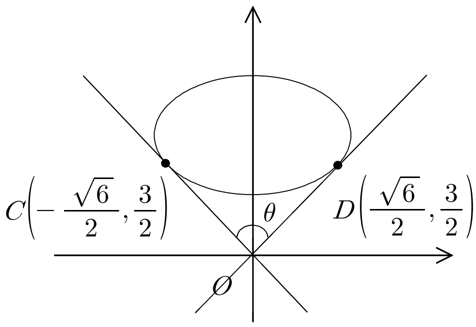


[2]

$\dfrac{dx}{dt} = -\sqrt{2}\sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$이므로

매개변수 함수의 미분공식에 의하여

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\cos t}{-\sqrt{2}\sin t} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\cos t}{\sin t}$ (단, $t \neq 0, t \neq \pi$).



원점 $O(0,0)$을 지나는 접선은 $y = ax$ 꼴이므로

접점에서의 t값은

$2 + \sin t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\cos t}{\sin t} \cdot \sqrt{2}\cos t$에서

$t = \dfrac{7\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{11\pi}{6}$

따라서 두 접점의 좌표는 $C\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$과 $D\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

두 접선이 이루는 각의 코사인값은 위치벡터 내적의 정의에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{5}$$

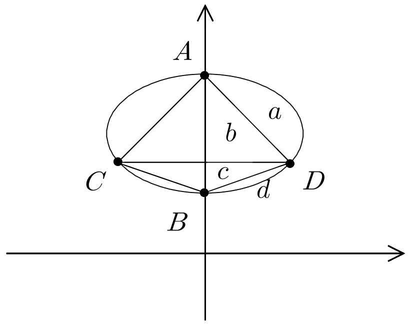
[3]

도형은 네 점을 잇는 선분들에 의해

y축에 대하여 대칭인 4개의 영역 a, b, c, d로 분할된다.

순서에 관계없이 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2 = \dfrac{{}_8\mathrm{P}_2}{2!} = \dfrac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$



선택된 두 영역이 y축에 대하여 대칭인 경우는

4가지 경우뿐이므로

여사건의 확률에 의하여 두 영역이 대칭이 아닐 확률은

$1 - \dfrac{4}{28} = \dfrac{6}{7}$

[4]

내접 직사각형의 한 꼭짓점의 좌표를

$(\sqrt{2}\cos t, 2+\sin t)$라고 하면 (단, $0<t<\pi/2$)

직사각형의 가로 길이는 $2\sqrt{2}\cos t$이고

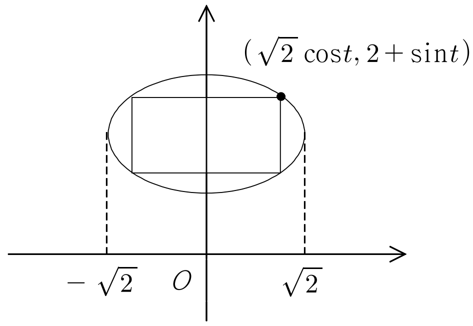
세로 길이는 $2\sin t$가 된다.

따라서 넓이는 $S(t)=4\sqrt{2}\sin t\cos t$

넓이의 최대값을 구하기 위해

$S'(t)=4\sqrt{2}(\cos^2 t-\sin^2 t)=4\sqrt{2}(\cos t+\sin t)(\cos t-\sin t)$이므로

$S'(t)=0$을 만족하는 t (단, $0<t<\pi/2$)에서 함수의 증감은



t	0	$\cdots$	$\pi/4$	$\cdots$	$\pi/2$
$S'(t)$	$4\sqrt{2}$	$+$	0	$-$	$-4\sqrt{2}$
$S(t)$	0	↗	최대	↘	0

$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$이므로

넓이 $S(t)$의 최대값은 $2\sqrt{2}$

[5]

$P(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,0)$, $Q(\frac{\sqrt{3}}{2},1,0)$이므로

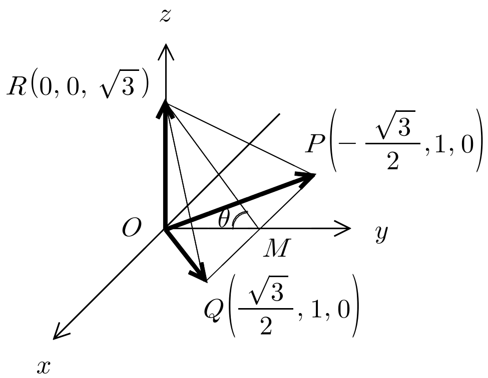
$\overrightarrow{PQ}=(\sqrt{3},0,0)$이고 $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3}$이다.

$\overrightarrow{OR}=(l,m,n)$라 하면

$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OR}=-\frac{\sqrt{3}}{2}l+m=0$, $\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OR}=\frac{\sqrt{3}}{2}l+m=0$

연립하면 $l=m=0$이므로

구하는 위치벡터는 $\overrightarrow{OR}=(0,0,\sqrt{3})$



평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면

점 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,0\right)$을 지나므로 $-\frac{\sqrt{3}}{2}a+b+d=0$,

점 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,0\right)$을 지나므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a+b+d=0$이다.

점 $R(0,0,\sqrt{3})$을 지나므로 $\sqrt{3}c+d=0$이고

이들 식을 연립하여 a,b,c를 d로 나타내면 $a=0$, $b=-d$, $c=-\frac{\sqrt{3}}{3}d$이므로

직선의 방정식은 $-dy-\frac{\sqrt{3}}{3}dz+d=0$이다.

$d=0$이라면 $a=b=c=0$이므로 이를 만족하는 평면이 존재하지 않는다.

$d\neq 0$일 때, 세 점 P,Q,R을 지나는 평면의 방정식은 $3y+\sqrt{3}z-3=0$이 된다.

세 점을 지나는 평면 위의 $\triangle PQR$의 xy 평면 위로의 정사영이 $\triangle PQO$이므로

$\triangle PQR$의 넓이를 S, $\triangle PQO$의 넓이를 S', 두 평면이 이루는 각을 θ라 하면

따라서 $\cos\theta=\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{MO}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{MR}|}=\frac{1}{2}$이므로, 두 평면이 이루는 각 $\theta=\frac{\pi}{3}$

[문제 2]

▣ 출제의도

학생들이 교육과정에서 배워 잘 알고 있는 부정적분과 도함수와의 관계, 도함수의 부호와 함수의 증가 등에 관한 제시문과 함께 주어진 몇 가지 문제를 해결하는 과정에서 수학적인 분석력과 논리력, 계산력, 그리고 교육과정에서 배운 여러 가지 개념과 수학적 원리에 대한 이해와 지식의 활용하고 응용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1] 함수의 로그 함수로 주어지는 합성함수의 도함수와 그의 부정적분과의 관계를 알고, 도함수가 0인 함수가 상수함수임을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[2] (1) 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 알고, 부등식에 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
(2) 부등식과 극한의 관계를 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[3] (1) 몫의 미분법을 바르게 사용하고 주어진 조건을 이용하여 도함수가 제시된 형태임을 보일 수 있는지 평가하는 문제이다.
(2) 주어진 조건을 만족시킬 때, 제시된 등식을 유도할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[4] 앞에서 해결한 내용을 활용하여 제시된 두 명제가 동치임을 증명할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

▣ 문항별 배점

[1] 10점
[2] (1) 10점 (2) 5점
[3] (1) 8점 (2) 5점
[4] 12점

▣ 참고자료

[제시문]
미적분 I, 김창동 외 14인, 교학사, 2016, 118-120쪽
미적분 I, 정상권 외 7인, 금성출판사, 2016, 126쪽
미적분 I, 김창동 외 14인, 교학사, 2016, 166쪽

[문항]
[1] 미적분 II, 류희찬 외 17인, 천재교과서, 2016, 167-168쪽
미적분 I, 정상권 외 7인, 금성출판사, 2016, 123쪽
미적분 II, 우정호 외 24인, 동아출판, 2016, 186쪽, 194쪽
미적분 II, 이준열 외 9인, 천재교육, 2016, 129쪽
[2] 미적분 I, 김창동 외 14인, 교학사, 2016, 63쪽
미적분 I, 정상권 외 7인, 금성출판사, 2016, 174-176쪽
미적분 I, 김창동 외 14인, 교학사, 2016, 118-120쪽
미적분 I, 황선욱 외 10인, 좋은책신사고, 2016, 63쪽
[3] 미적분 I, 김창동 외 14인, 교학사, 2016, 166쪽
미적분 I, 황선욱 외 10인, 좋은책신사고, 2016, 160쪽
[4] 수학 II, 황선욱 외 10인, 좋은책신사고, 2016, 41-43쪽
미적분 II, 이준열 외 9인, 천재교육, 2016, 134쪽

▣ 채점기준

문항	세부평가기준	세부 배점
1 (총10점)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$임을 아는가?	2점
	$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$이면 $\ln\lvert f(x)\rvert - \ln\lvert g(x)\rvert = C$임을 밝히는가?	3점
	$f(x) > 0,\ g(x) > 0$의 조건에서 $\ln\frac{f(x)}{g(x)} = C$를 얻었는가?	2점
	$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{C} = k$와 k가 양수임을 보였는가?	2점
	$f(x) = kg(x)$ (단, $a \le x \le b$이고 k는 양수)의 표현을 보였는가?	1점
2-1 (총10점)	$0 < \int_0^x [xf(t) - tf(t)]\,dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$ 를 얻는가?	3점
	$0 < \int_0^x tf(t)dt$ 임을 보이는가?	2점
	$0 < \int_0^x tf(t)dt < x\int_0^x f(t)dt$의 관계를 얻는가?	3점
	$\int_0^x f(t)dt > 0$을 명시하는가?	1점
	$0 < \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} < x$, 즉 부등식 $0 < P(x) < x$임을 얻었는가?	2점
2-2 (총5점)	$\lim_{x\to 0+} 0 = 0$을 얻는가?	1점
	$\lim_{x\to 0+} x = 0$을 얻는가?	1점
	$\lim_{x\to 0+} 0 \le \lim_{x\to 0+} P(x) \le \lim_{x\to 0+} x$임을 명시하는가?	2점
	$\lim_{x\to 0+} P(x) = 0$	1점
3-1 (총8점)	$\frac{d}{dx}P(x) = \dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$ 를 얻는가? $P(x) = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$에서 $P(x)\int_0^x f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt$을 얻어 곱의 미분법을 이용	4점
	$\frac{d}{dx}P(x) = \dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left\{x - \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}\right\}$로 정리하는가?	2점
	$\frac{d}{dx}P(x) = \dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\{x - P(x)\}$을 보이는가?	2점

문항	세부평가기준	세부 배점
3-2 (총5점)	$Q(x)$에 대해 $\frac{d}{dx}Q(x)=\frac{g(x)}{\int_0^x g(t)dt}\{x-Q(x)\}$을 얻는가?	1점
	$\frac{d}{dx}P(x)=\frac{d}{dx}Q(x)$, $\frac{g(x)}{\int_0^x g(t)dt}\{x-Q(x)\}=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\{x-P(x)\}$임을 말하는가?	1점
	$P(x)<x$ 또는 $P(x)-x\neq 0$를 명시하는가?	2점
	$\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}=\frac{g(x)}{\int_0^x g(t)dt}$ 을 얻는가?	1점
4 (총12점)	$P(x)=Q(x)$를 가정하는가?	1점
	[3]의 (2)에서 $\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}=\frac{g(x)}{\int_0^x g(t)dt}$ 또는 $f(x)\int_0^x g(t)dt=g(x)\int_0^x f(t)dt$를 이용하는가?	1점
	$f'(x)\int_0^x g(t)dt=g'(x)\int_0^x f(t)dt$을 얻는가?	3점
	$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$ 을 논리적으로 얻는가?	3점
	따라서 [1]에 의하여 $f(t)=kg(t)$ (단, k는 양수)을 얻는가.	1점
	$f(t)=kg(t)$ (단, k는 양수)라고 하자.	1점
	$P(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}=\frac{\int_0^x tkg(t)dt}{\int_0^x kg(t)dt}=\frac{\int_0^x tg(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}=Q(x)$	2점

▣ 모범답안

[1] 주어진 조건에 의하면 함수 $\ln f(x)-\ln g(x)$는 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능하며 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g(x)}=0$이므로 다음이 성립한다.

$$\ln f(x)-\ln g(x)=C \text{ (단, } a \le x \le b\text{이고 } C\text{는 적분상수)}$$

한편, $\ln f(x)-\ln g(x)=\ln\dfrac{f(x)}{g(x)}=C$ 이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=e^C=k>0$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f(x)=kg(x) \text{ (단, } a \le x \le b\text{이고 } k\text{는 양수)}$$

[2] (1) 함수 $f(t)$가 구간 $[0,1]$에서 연속이고 $(0,1)$에서 $f(t)>0$이면, $0<t<x$일 때 $0<tf(t)<xf(t)$이다. 따라서 제시문의 (다)에서 $p(t)=xf(t)-tf(t)$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$0<\int_0^x \{xf(t)-tf(t)\}dt = x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt, \quad (0<x<1)$$

또한 $0<\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$, $(0<x<1)$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$0<\int_0^x tf(t)dt<x\int_0^x f(t)dt, \quad (0<x<1)$$

여기서 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt>0$이므로 $0<\dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}<x$, 즉 부등식 $0<P(x)<x$이 성립한다.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} 0=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x=0$이다. $0<P(x)<x$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} 0 \le \lim_{x\to 0+} P(x) \le \lim_{x\to 0+} x$이다.
따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} P(x)=0$이다.

[3] (1) 함수의 몫의 미분법과 제시문 (나)를 이용하여 함수 $P(x)$를 미분하면

$$\frac{d}{dx}P(x)=\frac{xf(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}\left\{x-\frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}\right\}$$

$$=\frac{f(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}\{x-P(x)\}$$

(다른 방법) $P(x)=\dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}$에서 $P(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\int_0^x tf(t)dt$을 얻어 곱의 미분법을 이용해도 됨.

(2) 함수 $Q(x)$를 미분하면 (1)에서와 같은 방법으로 $\dfrac{d}{dx}Q(x) = \dfrac{g(x)}{\displaystyle\int_0^x g(t)dt}\{x - Q(x)\}$이다.

조건에서 $P(x) = Q(x)$이므로 $\dfrac{d}{dx}P(x) = \dfrac{d}{dx}Q(x)$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{g(x)}{\displaystyle\int_0^x g(t)dt}\{x - Q(x)\} = \frac{f(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}\{x - P(x)\}$$

그런데 $P(x) = Q(x)$이고 [2]에서 $P(x) < x$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt} = \frac{g(x)}{\displaystyle\int_0^x g(t)dt} \quad (\text{단, } 0 < x < 1)$$

[4] (A) 먼저 $P(x) = Q(x)$이라고 가정하자. 그러면 [3]의 (2)에서 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt} = \frac{g(x)}{\displaystyle\int_0^x g(t)dt} \quad \text{또는} \quad f(x)\int_0^x g(t)dt = g(x)\int_0^x f(t)dt$$

위 식의 양변을 미분하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$f'(x)\int_0^x g(t)dt = g'(x)\int_0^x f(t)dt$$

위의 두 식으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad (0 < x < 1)$$

따라서 [1]에 의하여 $f(t) = kg(t)$ (단, k는 양수)

(B) 이제 $f(t) = kg(t)$ (단, k는 양수)라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$P(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt} = \frac{\displaystyle\int_0^x tkg(t)dt}{\displaystyle\int_0^x kg(t)dt} = \frac{\displaystyle\int_0^x tg(t)dt}{\displaystyle\int_0^x g(t)dt} = Q(x)$$

(A)와 (B)에 의하여 증명이 끝났다.