2016학년도 모의 수리논술 출제의도 및 풀이예시

[문제 1]

◈ 출제의도

[1] 두 집합의 교집합을 구체적으로 구할 수 있는지에 대한 능력 및 행렬의 성질에 대한 응용력과 계산능력을 평가한다.

[2] 행렬의 곱과 행렬의 성분사이의 관계에 대한 이해력과 및 계산능력을 평가한다.

[3] 다항함수를 이용하여 얻은 행렬 중 특별한 성질을 갖는 행렬을 구할 수 있는지에 대한 응용력을 평가한다.

[4] 합성함수에 대한 이해력과 함수의 극한에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다.

[5] (1) 주어진 성질을 만족하는 함수에 대한 이해력과 증가함수에 대한 이해력 및 논리적인 증명 능력을 평가한다.

(2) 주어진 성질을 만족하는 함수에 대한 이해력과 두 집합의 포함관계를 증명할 수 있는 능력을 평가한다.

◈ 문항별 배점

[1] 5점

[2] 12점

[3] 8점

[4] 9점

[5] (1) 11점 (2) 5점

◈ 출제근거

[1] 교집합, 수학, 대한교과서, 13쪽,
행렬의 곱셈, 수학 I, 금성출판사, 26쪽
역행렬, 수학 I, 금성출판사, 33쪽

[2] 행렬의 곱셈, 수학 I, 금성출판사, 26쪽
케일리 정리, 수학 I 익힘책, 금성출판사, 27쪽

[3] 행렬의 곱셈, 수학 I, 금성출판사, 26쪽
케일리 정리, 수학 I 익힘책, 금성출판사, 27쪽

[4] 합성함수, 수학, 대한교과서, 259쪽
함수의 극한, 수학 II, 좋은책신사고, 75쪽

[5] 일대일함수, 수학, 대한교과서, 256쪽
함수의 증가와 감소, 수학익힘책, 좋은책신사고, 164쪽

광운대학교 KwangWoon University

<풀이예시>

[1] $A \in S_{2015}(\mathbb{R})$이면 $A^{2015} = O$이고 $\det(A^{2015}) = \det(O)$이다.

그런데 $\det(A^{2015}) = \{\det(A)\}^{2015}$이고 $\det(O) = 0$이므로 $\det(A) = 0$이다. [3점]

따라서 A는 역행렬을 갖지 않으므로 $A \notin T_2(\mathbb{R})$이다.

그러므로 $S_{2015}(\mathbb{R}) \cap T_2(\mathbb{R}) = \varnothing$ 이다. [2점]

[2] $A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E = O$ 이고 [5점]

[1]에서 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$이므로 $A^2 = (a_{11} + a_{22})A$이다. [2점]

따라서 $A^{2015} = (a_{11} + a_{22})^{2014}A$이고 $A \in S_{2015}(\mathbb{R})$이므로 $(a_{11} + a_{22})^{2014}A = O$이다. [2점]

그러므로 $a_{11} + a_{22} = 0$ 또는 $A = O$이다. 그런데 $A = O$이면 $a_{11} + a_{22} = 0$이므로 모든 행렬 $A \in S_{2015}(\mathbb{R})$에 대하여 $a_{11} + a_{22} = 0$이다. [3점]

[3] $A \in G$이면 $A \in S_{2015}(\mathbb{R})$이므로 [2]의 결과를 이용하면 $A^2 = (a_{11} + a_{22})A = O$이다. [3점]

따라서 $(A^2 + E)(A + E) = A + E$이고 $A \in G$이면 $(A^2 + E)(A + E) = E$이므로 $A + E = E$이되어 $A = O$이다. [3점]

그러므로 $G = \{O\}$이다. [2점]

[4] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_{2015}(\mathbb{R})$이면 [2]의 결과에 의하여 $d = -a$이므로 $f(a) = -a$이다. [3점]

이때 a는 임의의 실수이므로 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = -x$이다. [2점]

그러므로 $f^{(n)}(x) = (-1)^n x$이다. [2점]

따라서 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\{f^{(n)}(x)\}^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$이다. [2점]

[5] (1) $f(0) = f(0+0) = \{f(0)\}^2$이므로 $f(0)\{f(0) - 1\} = 0$이다. 그런데 $f(0) \neq 0$이므로 $f(0) = 1$이다. [3점]

또한 임의의 자연수 n에 대하여 $f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = \{f(1)\}^n$이고 [2점]

$1 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n)f(-n)$이므로 $f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{\{f(1)\}^n} = \{f(1)\}^{-n}$이다.

따라서 모든 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $f(n) = \{f(1)\}^n$이다. [3점]

그런데 $m < n$이면 $f(0) = 1$, $f(1) > 1$이므로 $f(n) - f(m) = \{f(1)\}^n - \{f(1)\}^m > 0$이다. 즉, $f(m) < f(n)$이다. [3점]

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{Z})$이라면 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$이므로

$\det(g(A)) = f(a_{11}a_{22})f(1) - f(a_{12}a_{21})f(1) = f(1)^{a_{11}a_{22}}f(1) - f(1)^{a_{12}a_{21}}f(1)$이다. [3점]

그런데 $f(1) > 1$이고 $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$이므로 $\det(g(A)) \neq 0$이 되어 $g(A)$의 역행렬이 존재한다.

따라서 $g(A) \in T_2(\mathbb{R})$이다. 그러므로 포함관계 $g(T_2(\mathbb{Z})) \subset T_2(\mathbb{R})$가 성립한다. [2점]

[문제 2]

◆ 출제의도

[문제 2] 정적분과 관련하여 수열의 극한, 무한등비급수, 정적분과 관련된 부등식, 구분구적법에 대한 이해와 구분구적으로 정적분의 근삿값을 구한다고 할 때 생기는 오차 등에 관련된 문제를 대해 생각한다. 이를 통하여 교과과정에서 배운 극한의 개념에 대한 이해와 활용, 정적분의 정의와 여러 가지 성질, 실수에 관한 삼각부등식, 평균값의 정리, 최대·최소의 정리, 수학적귀납법 등의 개념과 지식을 이해하고 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 드러나는 사고력, 논증력, 계산력 등을 종합적으로 알아 보고자 한다.

[1] 정적분을 구하는 문제를 통해 정적분의 정의, 무한 등비급수와 수열의 극한에 대한 이해력, 수리적 계산 능력과 논리력을 평가한다.

[2] 비교적 복잡하게 주어진 수열의 극한값을 구하는 것을 적당한 함수의 정적분을 구하는 문제로 인식하여 해결하는 능력을 평가하고자 한다. 동시에 정적분의 정의, 그리고 주어진 수열과 피적분 함수와의 관계를 정확히 이해하고 있는지를 평가한다.

[3] 교과 과정에서 배운 정적분은 그의 중요한 성질 중의 하나인 함수의 크기 관계를 유지한다는 것을 이해하고 정적분과 관련된 간단한 부등식에 관한 문제를 해결하는데 제시문에 주어진 지문을 사용할 수 있는 활용력을 평가하고자 한다.

[4] 미분과 적분의 주제와 관련하여 가장 중요한 정리들 중에 하나인 평균값의 정리를 활용하여 구분구적법의 개념과 정적분의 정의의 관계를 이해하고 있는지를 제시문의 지문을 적절하게 사용하여 해결할 수 있는 지를 평가하고자 한다. 특히, 아주 간단한 경우에 한 개의 적당한 사각형의 면적의 합으로 정적분(의 근삿값)을 구한다고 할 때 생기는 오차의 한계를 제시문의 평균값의 정리와 부등식과 관련한 정적분의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[5] 문항 [4]의 결과를 확장하고 그 결과를 활용하는 문제를 다룬다. 이를 통해 비교적 높은 수준의 종합적인 수리적 분석력과 통찰적 사고력, 그리고 구체적인 함수에 대해 얻은 결과를 정확하게 적용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다. 또한 대학에서의 수학 능력 평가의 한 요소로써 비교적 장문으로 주어진 문제의 지문에 대힌 이해력을 문제 해결의 완성도를 통해 평가한다.

문항별 배점

[1] 9 점

[2] 8 점

[3] 6 점

[4] (1) 4 점 (2) 6점

[5] (1) 12 점 (2) 5점

채점 가이드

답안에 드러난 문제에 대한 이해도, 풀이의 완성도와 (수리적 계산과 논리 전개의) 정확도 등을 기준으로 <풀이 예시>에서 제시한 기준 배점을 따르고 필요하면 좀 더 세분된 배점 기준을 만들어 채점에 활용할 수 있을 것이다.특히, 문항 [5]의 (2)는 바로 앞의 문제 (1)의 부등식에 대한 문제 풀이 여부와 관계없이 채점하기 바람

◆ 출제근거

[문제 2]의 제시문

[정적분의 정의] 적분과 통계, 정적분, 교학사, 35~36쪽

[정적분의 성질1] 적분과 통계, 정적분의 계산, 교학사, 41쪽

[정적분의 성질2] 적분과 통계, 정적분의 계산, 교학사, 42쪽

수학Ⅰ, 수학적귀납법, 좋은책 신사고, 143쪽

[실수의 삼각부등식] 수학, 절대부등식, ㈜미래엔 컬쳐그룹, 170쪽

수학Ⅰ, 수학적귀납법, 좋은책 신사고, 143쪽

[최대·최소의 정리] 수학Ⅱ, 연속함수의 성질, 두산동아, 109쪽

[평균값의 정리] 수학Ⅱ, 평균값의 정리, 두산동아, 177쪽

[문제 2]

[1] **정적분의 정의**, 적분과 통계, 정적분, 교학사, 35~36쪽

무한등비급수, 수학Ⅰ, 수열의 극한, 좋은책 신사고, 160~173쪽

수열의 극한, 수학Ⅰ, 수열의 극한, 좋은책 신사고, 175~187쪽

[2] **정적분의 계산**, 정적분과 무한급수와의 관계, 적분과 통계, 정적분, 교학사, 43쪽

[3] **정적분과 부등식에 대한 성질**, 적분과 통계, 정적분의 계산, 교학사, 44쪽

[4] **평균값의 정리**, 수학Ⅱ, 평균값의 정리, 두산동아, 177쪽

최대·최소의 정리, 수학Ⅱ, 연속함수의 성질, 두산동아, 109쪽

정적분의 성질, 적분과 통계, 정적분의 계산, 교학사, 40~44쪽

[5] **절대부등식(실수의 삼각부등식)**, 수학, 절대부등식, ㈜미래엔 컬쳐그룹, 170쪽

정적분의 성질, 적분과 통계, 정적분의 계산, 교학사, 42쪽

수학적귀납법, 수학Ⅰ, 수학적귀납법, 좋은책 신사고, 143쪽

<풀이 예시>

[1] 주어진 구간 $[0,1]$을 n 등분하면 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\dfrac{k}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$ 이고 $f(x)=e^x$라고 하면

$$f(x_k)=e^{x_k}=e^{k/n}=\{e^{1/n}\}^k,\ k=1,2,\ldots,n$$ [2점]

여기서 정적분의 정의와 무한등비급수의 부분합을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{e^{1/n}\}^k\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{k/n}+\cdots+e^{n/n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{1+1/n}-e^{1/n}}{e^{1/n}-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\{e^{1/n}\cdot(e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)\right\}\end{aligned}$$ [4점]

한편 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e^0=1$이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{e^{1/n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{e^{1/n}-1}{1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{f(1/n)-f(0)}{1/n-0}}=1$$

또 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{1/n}=1$이므로 극한의 성질에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{e^{1/n}\cdot(e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)\right\}=e-1$이다.

그러므로 $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx=e-1$이다. [3점]

[2] 주어진 식을 다음과 같이 변형할 수 있다. [3점]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{k}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\right)$$

구간을 $[0,1]$, $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=0+k\cdot\dfrac{1}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$이라 하자. 제시문의 [정적분의 정의]에 따르면 구하는 함수는 $h(x)=\dfrac{1}{2+x}$이다. [3점]

따라서 함수 $h(x)$의 정적분 $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx$를 이용하면 구하는 극한값은 다음과 같이 $\ln\dfrac{3}{2}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}h(x_k)\Delta x=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\ln(2+x)\Big]_0^1=\ln\frac{3}{2}$$ [2점]

광운대학교 KwangWoon University

[3] 구간 $[a,b]$에서 명백히 다음이 성립한다.

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,\ x \in [a,b]$$ [2점]

제시문의 [정적분의 성질1]과 [정적분과 부등식]을 이용하여 다음을 얻는다. [2점]

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$ [2점]

[4] (1) $x=a$이면 자명하다. 만일 $x\in(a,b]$라면 구간 $[a,x]$에 대하여 제시문의 [평균값의 정리]를 적용하면 다음 식을 만족시키는 점 c가 a와 x 사이에 적어도 하나 존재한다.

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$ [2점]

이때 T가 구간 $[a,b]$에서 $|f'(x)|$의 최댓값이므로 다음이 성립한다.

$$|f(x)-f(a)|=|f'(c)(x-a)|\le T(x-a),\quad x\in[a,b]$$ [2점]

(2) $(b-a)f(a)=\int_a^b f(a)\,dx$이므로 $\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right| = \left|\int_a^b \{f(x)-f(a)\}\,dx\right|$이다. [3점]

이제 문항 [3]의 부등식 ①, 제시문의 [정적분과 부등식]과 (1)의 부등식으로부터 다음을 얻는다. [3점]

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right| = \left|\int_a^b \{f(x)-f(a)\}\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)-f(a)|\,dx \le \int_a^b T(x-a)\,dx = \frac{T}{2}(b-a)^2$$

[5] (1) 구간 $[c,d]$를 N 등분하면 $\int_c^d g(x)dx = \sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx$ 이 성립하므로 부등식 ④의 왼쪽 항의 절대값 기호 안을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_c^d g(x)\,dx - w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx - w\,g(x_{k-1})\right\}$$ [3점]

이제 M_k를 소구간 $[x_{k-1},x_k]$ 에서 $|g'(x)|$의 최댓값이라 하고 문항 [4]의 식 ②를 적용하고, M이 구간 $[c,d]$에서 $|g'(x)|$의 최댓값임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx - w\,g(x_{k-1})\right| \le \frac{M_k}{2}w^2 \le \frac{M}{2}w^2,\ k=1,2,\ \dots,N$$ [4점]

이를 제시문의 [실수의 삼각부등식]과 결합하고 $w=\dfrac{d-c}{N}$임을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\left|\int_c^d g(x)\,dx - w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})\right| = \left|\sum_{k=1}^{N}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx - w\,g(x_{k-1})\right\}\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{N}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx - w\,g(x_{k-1})\right|$$ [3점]

$$\le \sum_{k=1}^{N}\frac{M}{2}w^2 = N\cdot\frac{M}{2}\left(\frac{d-c}{N}\right)^2 = \frac{M}{2N}(d-c)^2$$ [2점]

(2) 문항 [2]에서 구한 함수는 $h(x)=\dfrac{1}{2+x}$이다. 따라서 식 ③을 이용하여 정적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x}dx=\ln\frac{3}{2}$의 근삿값을 구한다면, $c=0,\ d=1$이고, 또 $f'(x)=\dfrac{-1}{(2+x)^2}$에서 $M=\dfrac{1}{4}$이다. **[2점]**

식 ④에 의한 오차한계가 $\dfrac{1}{200}$ 이하가 되게 하는 N의 최솟값은 다음 식에서 보인 것과 같이 25이다. **[3점]**

$$\frac{M}{2N}(d-c)^2=\frac{1}{8N}(1-0)^2\le\frac{1}{200}\qquad\Longrightarrow\qquad N\ge 25$$

<끝>

광운대학교 KwangWoon University