2016학년도 신입학 모집 관련

논술 모의평가 문제지(자연계열)

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

KWANGWOON UNIVERSITY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(50점)

1. 모든 정수들의 집합과 모든 실수들의 집합을 각각 $\mathbb{Z}$와 $\mathbb{R}$로 나타낸다. 또한 집합 X와 Y는 $\mathbb{R}$의 부분집합이다.

2. 집합 $M_2(X)$는 크기가 2×2이고 모든 성분이 집합 X의 원소인 행렬 전체의 집합이다. 또한 자연수 n에 대하여 집합 $S_n(X)$와 $T_2(X)$를 다음과 같이 정의한다.

$S_n(X)=\left\{A\in M_2(X)\mid A^n=O\right\}$ (단, O는 크기가 2×2인 영행렬이다.)
$T_2(X)=\{A\in M_2(X)\mid A$는 역행렬을 갖는다$\}$

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$에 대하여 $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$이다.

4. 두 행렬 $A,B\in M_2(\mathbb{R})$에 대하여 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$이다.

5. 함수 $f:X\to X$와 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}$은 f를 n번 합성한 함수이다. 즉, 원소 $x\in X$에 대하여 $f^{(n)}(x)=(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)$이다.

6. 함수 $f:X\to Y$에 대하여 (성질 P)를 다음과 같이 정의한다.

모든 $x_1, x_2\in X$에 대하여 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$이다.

[1] 교집합 $S_{2015}(\mathbb{R})\cap T_2(\mathbb{R})$를 구하고 이를 설명하시오.(5점)

[2] $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in S_{2015}(\mathbb{R})$일 때 $a_{11}+a_{22}$의 값을 구하시오.(12점)

[3] 문항 [2]를 이용하여 집합 $G=\left\{A\in S_{2015}(\mathbb{R})\mid (A^2+E)(A+E)=E\right\}$를 구하고 이를 설명하시오.(단, E는 크기가 2×2인 단위행렬이다.) (8점)

[4] 임의의 실수 a에 대하여 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in S_{2015}(\mathbb{R})$인 실수 b,c,d가 존재한다. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 $f(a)=d$로 정의할 때 극한값 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\{f^{(n)}(x)\}^2}$을 구하고 이를 설명하시오. (9점)

[5] $f(0)\neq0$, $f(1)>1$인 함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$가 (성질 P)를 만족시킬 때 다음 명제를 증명하시오.

(1) $n,m\in\mathbb{Z}$에 대하여 $m<n$이면 $f(m)<f(n)$이다. (11점)

(2) 함수 $g:M_2(\mathbb{Z})\to M_2(\mathbb{R})$를 $g\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{f(a_{11}a_{22})}{f(1)} & \dfrac{f(a_{12}a_{21})}{f(1)}\end{pmatrix}$로 정의하면 $g(T_2(\mathbb{Z}))\subset T_2(\mathbb{R})$이다. (5점)

<다음 면에 계속>

[문제 2] 다음 제시문을 이용하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

[정적분의 정의] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

[정적분의 성질1] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ (\text{단, } k\text{는 상수})$$
$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \ (\text{복부호 동순})$$

[정적분의 성질2] 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

또한, 수학적 귀납법에 의해 임의의 실수 $c_1, c_2, \dots, c_n$을 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$에 대해 다음이 성립한다.

$$\int_{c_1}^{c_n} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$$

[정적분과 부등식] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x)\le g(x)$일 때

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

[실수의 삼각 부등식] 임의의 실수 a, b에 대하여

$$|a+b| \le |a| + |b| \ (\text{단, 등호는 } ab \ge 0\text{일 때 성립})$$

또한, 수학적 귀납법에 의해 임의의 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \ \text{또는} \ \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k|$$

[최대·최소의 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

[평균값의 정리] 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 점 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

<다음 면에 계속>

[1] 정적분의 정의에 의하여 $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$임을 보이시오.(9점)

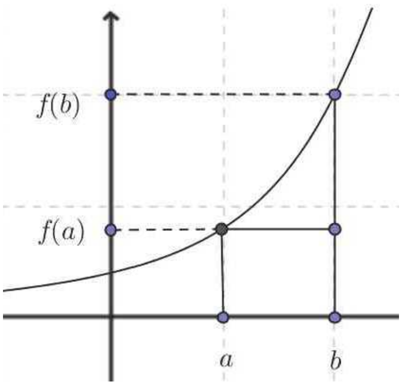
[2] 다음 극한값을 정적분 $\int_0^1 h(x)\,dx$를 이용하여 구한다고 할 때, 함수 $h(x)$와 극한값을 구하시오.(8점)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)$$

[3] 함수 $f(x)$가 실수 $a, b\ (a<b)$를 포함하는 구간에서 연속이면 다음이 성립함을 증명하시오.(6점)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

[4] 함수 $f(x)$가 실수 $a, b\ (a<b)$를 포함하는 구간에서 미분가능하고 $f(x) \ge 0$이며, 그의 도함수 $f'(x)$가 연속이다. 이때 구간 $[a, b]$에서 $|f'(x)|$의 최댓값을 T라 하자.



<그림1>

(1) $x \in [a, b]$에 대하여 다음이 성립함을 보이시오. (4점)

$$|f(x)-f(a)| \le T(x-a)$$

(2) 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 높이가 $f(a)$, 밑변의 길이가 $(b-a)$인 직사각형의 넓이 $(b-a)f(a) = \int_a^b f(a)\,dx$로 택하는 경우에 생기는 오차 $\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(a)\right|$에 대해 다음 부등식이 성립함을 보이시오.(<그림 1> 참조) (6점)

$$\left|\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a)\right| \le \frac{T}{2}(b-a)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

<다음 면에 계속>

[5] 함수 $g(x)$는 실수 $c, d\,(c<d)$를 포함하는 구간에서 $g(x)\geq 0$이고 미분 가능하며, 그의 도함수 $g'(x)$가 연속이다. 이때 구간 $[c, d]$를 N등분하고 $w=\dfrac{d-c}{N}$, $x_k=c+k\cdot w$, $k=0, 1, 2, \ldots, N$이라 하고, 또한 M을 구간 $[c, d]$에서 $|g'(x)|$의 최댓값이라 하자.
이제 각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$, $k=0, 1, 2, \ldots, N$에 대해 문항[4]에서와 같이 높이가 함숫값 $g(x_{k-1})$, 밑변의 길이가 $w=(x_k-x_{k-1})$인 직사각형의 넓이 $w\cdot g(x_{k-1})$을 생각하고 그들을 모두 합하면 다음 식 ③과 같다.

$$w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1}) = w\{g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{N-1})\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ③$$

한편 제시문의 [정적분의 성질2]에 의하면 $\displaystyle\int_c^d g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx$가 성립한다. 따라서 식 ③의 값을 정적분 $\displaystyle\int_c^d g(x)\,dx$의 근삿값으로 택할 수 있다.

(1) 이 경우에 발생하는 오차 $\left|\displaystyle\int_c^d g(x)\,dx - w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})\right|$의 한계에 대해 다음이 성립함을 보이시오. **(12점)**

$$\left|\int_c^d g(x)\,dx - w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})\right| \leq \frac{M}{2N}(d-c)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ④$$

(2) 문항 [2]에서 찾은 함수 $h(x)$의 정적분 $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx$의 근삿값을 구간 $[0, 1]$을 N등분한 후에 식 ③을 함수 $h(x)$에 적용하여 얻는 값으로 택하려고 한다. 이때 오차의 한계가 $\dfrac{1}{200}$ 이하가 되도록 하는 자연수 N의 최솟값을 부등식 ④를 이용하여 구하시오. **(5점)**

<끝>