2015학년도 논술고사 (자연계열 - 오후)
출제의도, 채점기준 및 모범답안

[문제 1]

▣ 출제의도

[1] (1) 행렬에 대해 주어진 지시문의 정확한 의미를 파악하고 2×2행렬의 역행렬을 계산하는 능력을 평가한다.
(2) 행렬의 곱에 대해 일반적인 규칙을 추론할 수 있는 능력을 평가하며 수열의 극한에 대한 계산 수행 능력을 평가한다.
(3) 일차변환의 의미를 정확히 이해하고 응용하는 능력을 평가한다.

[2] 역행렬이 존재하지 않는 행렬의 성질을 잘 이해하고 있는지 평가한다.

[3] 조건을 만족하는 경우의 수를 셈하는 능력을 평가한다.

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

제시문

[행렬] 금성출판사, 수학 I, 13쪽
[약수와 배수] 대한교과서, 수학, 91쪽

문제

[1](1) 수학 I, 14쪽, 행렬의 정의, 두산동아
수학 I, 31쪽, 역행렬, 금성출판사
수학 I, 25쪽, 행렬의 곱셈, 금성출판사
(2) 수학 I, 24쪽~26쪽, 행렬의 곱셈, 두산동아
수학 II, 79쪽, 지수 함수의 극한, 천재교육
(3) 기하와벡터, 11쪽, 일차변환과 행렬, 좋은책 신사고
수학 I, 35쪽, 역행렬의 성질, 금성출판사
[2] 수학 I, 35쪽, 역행렬의 성질, 금성출판사
수학 I 익힘책, 24쪽, 역행렬이 존재할 필요충분조건, 좋은책 신사고
수학, 91쪽, 약수와 배수, 대한교과서
[3] 수학, 261쪽, 역함수, 대한교과서

▣ 문항별 배점

[1] (1) 8점
(2) 10점
(3) 13점
[2] 12점
[3] 7점

▣ 채점 가이드

[문제 1]

[1](31점)

(1)(8점) L이 $L_2(\mathbb{R})$의 원소이므로 $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}$이라고 놓자.

$$f_A(L)=LA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ al+c & bl+d\end{pmatrix}$$

여기서 $f_A(L)$이 U의 원소이므로 행렬의 $(2,1)$성분인 $al+c$값이 0이다.

따라서 $l=-\frac{c}{a}$ 이므로, 행렬 $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$ 이다. [4점]

L의 역행렬은 $L^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$이므로, $L^{-1}\in L_2(\mathbb{R})$이다. [4점]

(2)(10점) $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$이므로, $L^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$ 이므로 $a_n=-n\frac{c}{a}$이다. [5점]

따라서 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n+2}{n}=1+\frac{2}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2$ [5점]

(3)(13점) $f_A(L)=LA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ l+1 & l+2\end{pmatrix}$가 $U_2(\mathbb{R})$의 원소가 되려면 $l=-1$이므로 다음을 얻는다.

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ f_A(L)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ [4점+2점 =6점]

주어진 일차 변환은 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$이므로 $x'=x+y,\ y'=y$이다. 이 관계를 주어진 $y=g(x)$에 대입하여 옮겨진 곡선의 방정식을 얻으면 $y'=(x'-y'+1)(x'-y'+2)(x'-y'+3)$이다. 이 곡선의 x축과의 교점을 구하기 위하여 $y'=0$을 대입하면 $x'=-1,-2,-3$ 을 얻는다. [7점]

[별해]

$f_A(L)=LA=\begin{pmatrix}1&0\\l&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\l+1&l+2\end{pmatrix}$가 $U_2(\mathbb{R})$의 원소가 되려면 $l=-1$이어야 하므로 ,

$L=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ 이고 $f_A(L)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이다. [4점+2점 =6점]

주어진 일차 변환은 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$이므로 $x'=x+y,\ y'=y$이다. 옮겨진 곡선의 x축과의 교점을 구하기 위하여 $y'=0$을 대입하면 $x'=x$이 된다. 이로부터 옮겨진 곡선의 x축과의 교점이 변하지 않음을 알 수 있다. 따라서 옮겨진 곡선의 x축과의 교점도 $-1,-2,-3$ 이다. [7점]

[2](12점)

행렬 $D=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 경우에 다음이 성립한다.

$$\alpha\delta-\beta\gamma=0$$ [2점]

이때 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_1$, 즉 $\gamma\neq 0,\delta\neq 0$이므로 $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}$이다. 여기서 $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}=k$라 놓으면 k는 양수이고 또 $\alpha=\gamma k,\beta=\delta k$이다. 주어진 행렬의 성분에 대한 조건에서 $\gamma\neq\delta$이어야 하고, 또한 다음을 얻는다.

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-\delta^2}=\frac{\gamma^2k^2-\delta^2k^2}{\gamma^2-\delta^2}=k^2=9$$

따라서 $k=3$이고 $\alpha=3\gamma,\beta=3\delta$ 이다. 그러므로 구하는 행렬은 다음과 같은 형태이다.

$$D=\begin{pmatrix}3\gamma&3\delta\\\gamma&\delta\end{pmatrix},\quad \gamma\neq\delta,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_1$$ [5점]

$N_1=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$이므로 구하는 행렬 D는 다음과 같이 12 가지이다.

[빠진 것이 있을 경우, 비율에 따라 부분점수 부여]

$$\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&12\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&24\\1&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&3\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&12\\2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&24\\2&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&3\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&6\\4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&24\\4&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}24&3\\8&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}24&6\\8&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}24&12\\8&4\end{pmatrix}$$ [5점]

[3](7점)

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다. [답안의 완성도에 따라 부분점수 부여]

$N_2=\{1,2,4,8\},\ f(1)=f^{-1}(1)$ [단, 답만 쓴 경우는 0점 처리]

1) $f(1)=f^{-1}(1)=1$인 경우,

집합 $\{2,4,8\}$에서 집합 $\{2,4,8\}$로의 일대일대응의 개수는 $3\times2\times1=6$

2) $f(1)=f^{-1}(1)=2$인 경우,

$f(1)=2$ 이고, $f(2)=1$이므로 집합 $\{4,8\}$에서 집합 $\{4,8\}$로의 일대일대응의 개수는 $2\times1=2$

3) $f(1)=f^{-1}(1)=4$인 경우,

$f(1)=4$ 이고, $f(4)=1$이므로 집합 $\{2,8\}$에서 집합 $\{2,8\}$로의 일대일대응의 개수는 $2\times 1=2$

4) $f(1)=f^{-1}(1)=8$인 경우,

$f(1)=8$ 이고, $f(8)=1$이므로 집합 $\{2,4\}$에서 집합 $\{2,4\}$로의 일대일대응의 개수는 $2\times 1=2$

즉, 함수 f의 개수는 $6+2+2+2=12$ 개

[별해]

$f(1)=f^{-1}(1)=1$인 경우는 $3!=6$ 개

$f(1)=f^{-1}(1)\neq 1$인 경우는 $3\times 2!=6$ 개

즉, 함수 f의 개수는 12개

(답만 쓴 경우는 0점 처리)

▣ 풀이예시

[문제 2]

[1] (1) L이 $L_2(\mathbb{R})$의 원소이므로 $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}$이라고 놓자.

$$f_A(L)=LA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ al+c & bl+d\end{pmatrix}$$

여기서 $f_A(L)$이 U의 원소이므로 행렬의 $(2,1)$성분인 $al+c$값이 0이다.

따라서 $l=-\dfrac{c}{a}$ 이므로, 행렬 $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$ 이다.

L의 역행렬은 $L^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$이므로, $L^{-1}\in L_2(\mathbb{R})$이다.

(2) $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$이므로, $L^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{c}{a} & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n\dfrac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$ 이므로 $a_n=-n\dfrac{c}{a}$이다.

따라서 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}=1+\dfrac{2}{n}$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2$

(3) $f_A(L)=LA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ l+1 & l+2\end{pmatrix}$가 $U_2(\mathbb{R})$의 원소가 되려면 $l=-1$이므로,

$L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 이고 $f_A(L)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이다.

주어진 일차 변환은 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$이므로 $x'=x+y,\ y'=y$이다. 이 관계를 주어진 $y=g(x)$에 대입하여 옮겨진 곡선의 방정식을 얻으면 $y'=(x'-y'+1)(x'-y'+2)(x'-y'+3)$이다. 이 곡선의 x축과의 교점을 구하기 위하여 $y'=0$을 대입하면 $x'=-1,-2,-3$ 을 얻는다.

[별해]

$f_A(L)=LA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ l+1 & l+2\end{pmatrix}$가 $U_2(\mathbb{R})$의 원소가 되려면 $l=-1$이므로,

$L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 이고 $f_A(L)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이다.

주어진 일차 변환은 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$이므로 $x'=x+y,\ y'=y$이다. 옮겨진 곡선의 x축과의 교점을 구하기 위하여 $y'=0$을 대입하면 $x'=x$이 된다. 이로부터 옮겨진 곡선의 x축과의 교점이 변하지 않음을 알 수 있다. 따라서 옮겨진 곡선의 x축과의 교점도 $-1,-2,-3$ 이다.

[2] 행렬 $D=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 경우에 다음이 성립한다.

$$\alpha\delta-\beta\gamma=0$$

이때 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_1$, 즉 $\gamma\neq 0,\delta\neq 0$이므로 $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}$이다. 여기서 $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}=k$라 놓으면 k는 양수이고 또 $\alpha=\gamma k,\beta=\delta k$이다. 주어진 행렬의 성분에 대한 조건에서 $\gamma\neq\delta$이어야 하고, 또한 다음을 얻는다.

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-\delta^2}=\frac{\gamma^2k^2-\delta^2k^2}{\gamma^2-\delta^2}=k^2=9$$

따라서 $k=3$이고 $\alpha=3\gamma,\beta=3\delta$ 이다. 그러므로 구하는 행렬은 다음과 같은 형태이다.

$$D=\begin{pmatrix}3\gamma & 3\delta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad \gamma\neq\delta,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_1$$

$N_1=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$이므로 구하는 행렬 D는 다음과 같이 12 가지이다.

$$\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&12\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&24\\1&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&3\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&12\\2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&24\\2&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&3\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&6\\4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&24\\4&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}24&3\\8&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}24&6\\8&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}24&12\\8&4\end{pmatrix}$$

[3] 함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.
$N_2=\{1,2,4,8\}$, $f(1)=f^{-1}(1)$

1) $f(1)=f^{-1}(1)=1$인 경우,
집합 $\{2,4,8\}$에서 집합 $\{2,4,8\}$로의 일대일대응의 개수는 $3\times 2\times 1=6$

2) $f(1)=f^{-1}(1)=2$인 경우,
$f(1)=2$ 이고, $f(2)=1$이므로 집합 $\{4,8\}$에서 집합 $\{4,8\}$로의 일대일대응의 개수는 $2\times 1=2$

3) $f(1)=f^{-1}(1)=4$인 경우,
$f(1)=4$ 이고, $f(4)=1$이므로 집합 $\{2,8\}$에서 집합 $\{2,8\}$로의 일대일대응의 개수는 $2\times 1=2$

4) $f(1)=f^{-1}(1)=8$인 경우,
$f(1)=8$ 이고, $f(8)=1$이므로 집합 $\{2,4\}$에서 집합 $\{2,4\}$로의 일대일대응의 개수는 $2\times 1=2$

즉, 함수 f의 개수는 $6+2+2+2=12$ 개

[별해]
$f(1)=f^{-1}(1)=1$인 경우는 $3!=6$ 개
$f(1)=f^{-1}(1)\neq 1$인 경우는 $3\times 2!=6$ 개
즉, 함수 f의 개수는 12개

[문제 2]

▣ 출제의도

[문제 2] 이 문제는 점 $x=a$를 포함한 적당한 구간에서 두 번 미분 가능한 함수 $f(x)$의 점 $x=a$ 부근에서의 함숫값의 근삿값을 점 $(a,f(a))$에서의 접선을 이용해 구할 경우에 생기는 오차의 한계에 대해 다루고 있다. 이 과정에서 대학에서 수학(修學)하는 데 요구되는 종합적으로 문제를 이해·분석하고 해결하는 능력과 적정한 수준의 수리적 지식과 계산 능력, 그리고 논리적 전개능력 등을 갖추고 있는지를 평가하고자 한다. 특히, 식의 등식 변형, 함수의 극한에 관한 성질, 미분계수의 정의와 접선의 방정식의 의미, 롤의 정리의 활용 및 교과서에서 배운 증명 방법을 활용하여 제시되는 문제를 해결할 수 있는 수학적인 지식과 능력을 평가한다. 각 문항의 출제 의도는 다음과 같다.

[1] 함수의 극한에 관한 성질을 이해하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가
[2] 교과서에서 배운 증명 방법을 습득하고 활용하여 주어진 문제를 해결하는 능력을 평가
[3] 구체적인 함수에 대해 문제에서 요구하는 것을 올바르게 계산할 수 있는 능력을 평가
[4] 문제에서 지시된 내용을 잘 이해하는지와 교과서에서 배운 평균값의 정리의 증명에서 쓰인 방법을 비슷한 상황에 적용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가
[5] 앞의 문항에서 얻은 결과의 의미를 잘 이해하여 요구되는 문제를 해결하는 능력을 평가

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

제시문

[함수의 극한에 관한 성질] 천재교육, 수학 II, 68쪽
[함수의 극한] 더텍스트, 수학 II, 81쪽
[미분계수와 미분가능] 금성출판사, 수학 II, 121쪽
[미분계수에 관한 성질] 더텍스트, 수학 II, 81쪽; 천재교육, 수학 II, 68쪽
[접선의 방정식] 천재교육, 수학 II, 146쪽
[롤의 정리] 금성출판사, 수학 II, 172쪽

문제

[1] 수학 II, 115쪽, 미분가능성과 연속성 증명, 더텍스트
수학 II, 81쪽, 함수의 극한에 대한 성질, 더텍스트
[2] 수학 II, 146쪽, 접선의 방정식, 천재교육
[3] 수학 II, 172쪽, 롤의 정리, 금성출판사
수학 II, 160쪽, 평균값의 정리의 증명, 좋은책 신사고
[4] 수학 II, 172쪽, 롤의 정리, 금성출판사
수학 II, 160쪽, 평균값의 정리의 증명, 좋은책 신사고
수학 II, 81쪽, 함수의 극한, 더텍스트
[5] 수학 II, 103쪽, 최대·최소정리, 좋은책 신사고
수학 II, 175쪽, 함수의 최대·최소, 좋은책 신사고

▣ 문항별 배점

[1] 10점
[2] 5점
[3] 9점
[4] 12점
[5] 14점

▣ 채점 가이드

[문제 2]

[1](10점) $L_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = \lim_{x\to a}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\}$ 이다. [3점]
제시문의 [항등식]에 의하면 $x \neq a$일 때 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}(x-a)$$
$$= \lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right\}(x-a)$$
[4점]

여기서 제시문의 [미분계수에 관한 성질]에 의하면 $\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right\} = 0$이고 분명히 $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$ 이다. 따라서 [함수의 극한에 관한 성질]을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = 0$$ [3점]

[별해1] 제시문의 [미분계수에 관한 성질]에서 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right\} \equiv \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$ [3점]

여기서 $p(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, $q(x) = x - a$라 놓으면 $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, $\lim_{x\to a}q(x) = 0$이다. [2점]
따라서 제시문의 [극한의 성질]을 이용하면 $\lim_{x\to a}p(x) = 0$이므로 다음을 얻는다. [2점]

$$\lim_{x\to a}p(x) = \lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\} = \lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = 0$$ [3점]

[별해2] 함수 $f(x)$가 $x = a$ 에서 미분 가능하므로 $x = a$ 에서 연속이고, 또 $L_a(x)$ 도 일차함수이므로 $x = a$ 에서 연속이다. [4점]
따라서 $\lim_{x\to a}f(x) = f(a), \lim_{x\to a}L_a(x) = f(a)$이다 [3점]

여기서 [함수의 극한에 관한 성질]을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \to a}\{f(x) - L_a(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} L_a(x) = f(a) - f(a) = 0$$ [3점]

[2](5점) 주어진 함수 $f(x) = (1+x)^{1/3}$의 도함수는 $f'(x) = \dfrac{1}{3(1+x)^{2/3}}$이다. [1점]

이때 $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{1}{3}$이므로 주어진 함수의 $L_0(x)$는 다음과 같다.

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{3}x$$ [2점]

따라서 $L_0(\frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$이다. [2점]

[3](9점) 주어진 조건에 의하면 함수 $f(t)$와 이차함수 $f(a) + f'(a)(t-a) + K(t-a)^2$가 닫힌구간 $[a,x]$에서 연속이고, 열린구간 (a,x)에서 연속이다. [2점]
한편

$$F(a) = f(a) - f(a) - f'(a)(a-a) - K(a-a)^2 = 0$$ [2점]

또 K는 $t = x$일 때 식 ①을 만족시키는 실수이므로

$$F(x) = f(x) - L_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - K(x-a)^2 = 0$$ [2점]

따라서 $F(a) = F(x) = 0$이므로 제시문의 [롤의 정리]에 의해

$$F'(d) = 0 \quad \cdots\cdots \quad ③$$

인 점 d가 a와 s 사이에 적어도 하나 있다. [3점]

[4](12점) 함수 $F'(t)$의 도함수는 다음과 같다.

$$F'(t) = f'(t) - f'(a) - 2K(t-a)$$ [2점]

문제의 조건에서 함수 $f(t)$가 $a,x \in I$인 구간에서 두 번 미분 가능하고 $d < x$이므로 $f'(t)$는 닫힌구간 $[a,d]$에서 연속이고, 열린구간 (a,d)에서 미분가능하다. 이는 일차함수 $f'(a) + 2K(t-a)$의 경우에도 성립한다. [2점]
또한 분명히

$$F'(a) = f'(a) - f'(a) - 2K(a-a) = 0$$ [2점]

이고, 또 식 ③을 참조하면 $F'(a) = F'(d) = 0$을 얻는다. 따라서 제시문의 [롤의 정리]를 $F'(t)$에 적용하면

$$F''(c) = f''(c) - 2K = 0$$ [2점]

인 점 c가 a와 d 사이에 적어도 하나 존재한다. 여기서 위 식을 정리하고 $a < c < d < x$임을 이용하면 구간 (a, x)에 다음을 만족시키는 점 c가 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

$$K = \frac{1}{2} f''(c)$$ [4점]

[5](14점) 주어진 식 ①과 문항 [4]의 결과를 합치면 점 a와 x 사이에 다음을 만족시키는 점 c가 존재한다.

$$f(x) - L_a(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2$$ [4점]

주어진 함수 $f(x) = \sqrt{1+x}$에 대하여 다음을 얻는다.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$$ [3점]

이때 $0 \le x \le \frac{1}{8}$인 임의의 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|f''(x)| = \frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \le \frac{1}{4}$$ [3점]

따라서 $a = 0$과 $0 \le x \le \frac{1}{8}$인 임의의 x에 대하여 다음을 얻는다.

$$|f(x) - L_0(x)| = \frac{1}{2} |f''(c)| (x-a)^2 \le \frac{1}{2} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{512}$$ [4점]

▣ 풀이 예시

[문제 2]

[1] $L_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = \lim_{x\to a}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\}$ 이다.

제시문의 [항등식]에 의하면 $x \neq a$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a}(x-a) \\ &= \lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right\}(x-a)\end{aligned}$$

여기서 제시문의 [미분계수에 관한 성질]에 의하면 $\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right\} = 0$이고 분명히 $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$ 이다. 따라서 [함수의 극한에 관한 성질]을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = 0$$

[별해1] 제시문의 [미분계수에 관한 성질]에서 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right\} \equiv \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

여기서 $p(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, $q(x) = x - a$라 놓으면 $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, $\lim_{x\to a}q(x) = 0$이다.

따라서 제시문의 [극한의 성질]을 이용하면 $\lim_{x\to a}p(x) = 0$이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}p(x) = \lim_{x\to a}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\} = \lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = 0$$

[별해2] 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분 가능하므로 $x = a$에서 연속이고, 또 $L_a(x)$도 일차함수이므로 $x = a$에서 연속이다. 따라서 $\lim_{x\to a}f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to a}L_a(x) = f(a)$이다.

여기서 [함수의 극한에 관한 성질]을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}\{f(x) - L_a(x)\} = \lim_{x\to a}f(x) - \lim_{x\to a}L_a(x) = f(a) - f(a) = 0$$

[2](5점) 주어진 함수 $f(x) = (1+x)^{1/3}$의 도함수는 $f'(x) = \frac{1}{3(1+x)^{2/3}}$이다.

이때 $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$이므로 주어진 함수의 $L_0(x)$는 다음과 같다.

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{3}x$$

따라서 $L_0(\frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$ 이다.

[3] 주어진 조건에 의하면 함수 $f(t)$와 이차함수 $f(a) + f'(a)(t-a) + K(t-a)^2$가 닫힌구간 $[a,x]$에서 연속이고, 열린구간 (a,x)에서 연속이다. 한편 다음이 성립한다.

$$F(a) = f(a) - f(a) - f'(a)(a-a) - K(a-a)^2 = 0$$

또 K는 $t = x$일 때 식 ①을 만족시키는 실수이므로

$$F(x) = f(x) - L_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - K(x-a)^2 = 0$$

따라서 $F(a) = F(x) = 0$이므로 제시문의 [롤의 정리]에 의해

$$F'(d) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad ③$$

인 점 d가 a와 s 사이에 적어도 하나 있다.

[4] 함수 $F'(t)$의 도함수는 다음과 같다.

$$F'(t) = f'(t) - f'(a) - 2K(t-a)$$

문제의 조건에서 함수 $f(t)$가 $a,x \in I$인 구간에서 두 번 미분 가능하고 $d < x$이므로 $f'(t)$는 닫힌구간 $[a,d]$에서 연속이고, 열린구간 (a,d)에서 미분가능하다. 이는 일차함수 $f'(a) + 2K(t-a)$의 경우에도 성립한다. 또한 분명히

$$F'(a) = f'(a) - f'(a) - 2K(a-a) = 0$$

이고, 식 ③을 참조하면 $F'(a) = F'(d) = 0$을 얻는다. 따라서 제시문의 [롤의 정리]를 $F'(t)$에 적용하면

$$F''(c) = f''(c) - 2K = 0$$

인 점 c가 a와 d 사이에 적어도 하나 존재한다. 여기서 위 식을 정리하고 $a < c < d < x$임을 이용하면 구간 (a,x)에 다음을 만족시키는 점 c가 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

$$K = \frac{1}{2}f''(c)$$

[5] 주어진 식 ①과 문항 [4]의 결과를 합치면 점 a와 x 사이에 다음을 만족시키는 점 c가 존재한다.

$$f(x)-L_a(x)=\frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$$

주어진 함수 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 에 대하여 다음을 얻는다.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ f''(x)=-\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$$

이때 $0\le x\le\frac{1}{8}$ 인 임의의 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|f''(x)|=\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}\le\frac{1}{4}$$

따라서 $a=0$과 $0\le x\le\frac{1}{8}$ 인 임의의 x에 대하여 다음을 얻는다.

$$|f(x)-L_0(x)|=\frac{1}{2}|f''(c)|(x-a)^2\le\frac{1}{2}\frac{1}{4}(\frac{1}{8})^2=\frac{1}{512}$$