2015학년도 신입학 수시모집 논술고사
문제, 출제의도, 채점기준 및 모범답안
(자연계열 - 오후)

광운대학교 입학처

2015학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-오후)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] 다음 제시문을 이용하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(50점)

1. $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.
2. $M_2(\mathbb{R})$은 모든 성분이 실수인 2×2행렬 전체의 집합이다.
3. $L_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \mid l \in \mathbb{R} \right\}$
4. $U_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} \mid s,t,u \in \mathbb{R} \right\}$
5. $N_1 = \{t | t$는 24의 모든 양의 약수$\}$
6. $N_2 = \{t | t$는 8의 모든 양의 약수$\}$

[1] $ad-bc \neq 0$, $ac \neq 0$인 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$에 대하여 함수 $f_A : L_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$을 $f_A(L) = LA$ 로 정의하자. **행렬 $f_A(L)$이 집합 $U_2(\mathbb{R})$의 원소가 된다**고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 밑줄 친 조건을 만족시키는 행렬 L과 그의 역행렬 L^{-1}을 구하시오.[8점]

(2) 자연수 n에 대하여 행렬 L의 n거듭제곱 L^n의 $(2,1)$ 성분을 a_n이라고 할 때, 다음 극한값을 구하시오.[10점]

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+2}}{a_n} \right)^n$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고, $g(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$이다. 조건 $f_A(L) \in U_2(\mathbb{R})$을 만족시키는 행렬 L을 구하고, 곡선 $y = g(x)$가 일차변환 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f_A(L) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 의해 옮겨진 곡선의 x축과의 교점을 모두 구하시오.[13점]

[2] $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_1$인 행렬 $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 중에 역행렬이 존재하지 않으며, $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \delta^2} = 9$를 만족하는 것을 모두 구하시오.[12점]

[3] 집합 N_2에서 N_2로의 함수 f 중 역함수 f^{-1}가 존재하고, $f(1) = f^{-1}(1)$인 것의 개수를 구하시오.[7점]

<다음 장 계속>

[문제 2] 다음에 제시된 지문을 읽고 문항별로 충분한 근거를 제시하는 풀이와 함께 답하시오.(50점)

[함수의 극한에 관한 성질] $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha, \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α,β는 실수)일 때,

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta \text{ (복부호동순)}, \lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta, \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta} \text{ (단}, g(x)\neq 0,\ \beta\neq 0)$$

[함수의 극한] $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

[미분계수와 미분가능] 함수 $f(x)$에서 $x\to a$일 때의 극한값

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 하고, 이 극한값을 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라 한다. 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

[미분계수에 관한 성질] 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right\}=0$$

[접선의 방정식] 함수 $y=f(x)$가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

이때 우변의 일차함수를 $L_a(x)$와 같이 나타내자. 즉 다음과 같다.

$$L_a(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

[롤의 정리] 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0,\ a<c<b$$

인 점 c가 적어도 하나 존재한다.

< 다음 장 계속>

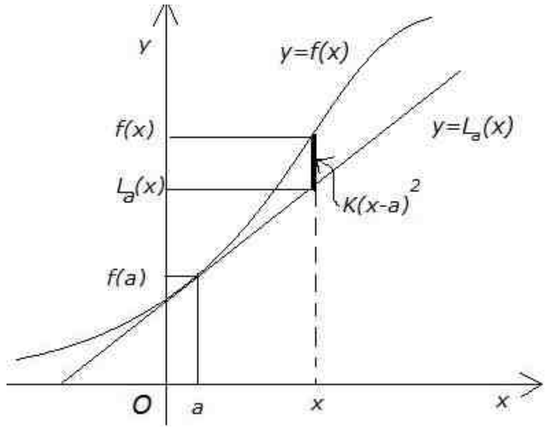
[1] 점 $x=a$를 포함하는 구간에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 점 $x=a$에서 미분가능하면 다음이 성립함을 증명하시오. [10점]

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-L_a(x)\}=0$$

[2] $x=0$에서 함수 $f(x)=(1+x)^{1/3}$의 $L_0(\frac{1}{4})$을 구하시오. [5점]

※([3]~[5]) 점 a를 포함하는 구간 I에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 점 $x\in I$에서의 $f(x)$과 $L_a(x)$의 차이 $f(x)-L_a(x)$는 $(x-a)^2$과 적당한 실수 K의 곱으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.(<그림 1> 참조)

$$f(x)-L_a(x)=K(x-a)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$



<그림 1>

이때 실수 K와 주어진 함수 $f(x)$를 이용하여 구간 I에서 함수 $F(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(t)=f(t)-f(a)-f'(a)(t-a)-K(t-a)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

다음 물음에 답하시오.

[3] $a<x$인 $x\in I$에 대하여 K를 식 ①을 만족시키는 실수라 하자. 그러면 식 ②로 주어진 함수 $F(t)$에 대하여 다음을 만족시키는 점 d가 구간 (a,x)에 적어도 하나 존재함을 보이시오. [9점]

$$F'(d)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

[4] 문항 [3]의 함수 $F(t)$의 도함수 $F'(t)$를 구하고, 구간 $[a,\,d]$에서 함수 $F'(t)$에 롤의 정리를 사용하여 다음을 만족시키는 점 c가 구간 (a,x)에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [12점]

$$K=\frac{1}{2}f''(c) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

[5] 함수 $f(x)=\sqrt{1+x}$와 $L_0(x)$에 대하여 다음이 성립함을 문항 [4]의 결과를 이용하여 보이시오. [14점]

$$|f(x)-L_0(x)|\le\frac{1}{512},\ 0\le x\le\frac{1}{8}$$

<끝>