2015학년도 논술고사 (자연계열 - 오전)
출제의도, 채점기준 및 모범답안

[문제1]

▣ 출제의도

대학에서 학업을 수학하기에 요구되는 종합적 문제이해 능력 및 해결능력을 기하 도형의 방정식과 벡터적 표현을 통해 확인한다. 이 문제들을 통해 도형의 정의를 이해하고 있는지, 방정식을 세울 수 있는지, 문제에서 요구하는 함수를 기하학적 사고와 수학적 연산으로 해결할 수 있는지, 적분 및 각도 계산에 요구되는 복잡한 계산을 수행할 능력이 있는지를 평가한다.

[1] 주어진 조건에 맞는 방정식을 세울 수 있는 능력을 평가한다.
[2] 각도를 길이로 표현하고 식을 단순화하여 부등식을 이해하는 능력을 평가한다.
[3] 두 점이 이루는 벡터를 식으로 표현하고, 식이 만드는 도형에 대해 이해하는 능력을 평가한다.
[4] 대칭변환에 의한 도형의 모양변화와 축의 둘레로 회전시킨 도형의 부피를 구하는 식을 이해하고, 상황에 맞게 정확한 계산을 수행하는 능력을 평가한다.
[5] 주어진 식을 이용해 정확한 계산을 하는 능력을 평가한다.

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

제시문

[타원의 정의와 방정식] 기하와 벡터, 미래엔 54~55쪽
[제이코사인법칙] 수학, 미래엔 컬처그룹 362쪽
[산술평균, 기하평균] 수학, 대한교과서, 152쪽, 155쪽
[평면벡터의 내적] 기하와 벡터, 미래엔 150쪽
[삼각함수의 덧셈정리] 수학Ⅱ, 더텍스트 43쪽

문제

[1] 타원, 기하와 벡터, 미래엔 54~55쪽
[2] 타원, 기하와 벡터, 대한교과서 54~55쪽,
산술평균과 기하평균, 수학, 미래엔 컬처그룹 169쪽
삼각함수, 수학, 미래엔 컬처그룹 362쪽
[3] 정적분의 활용, 적분과 통계, 두산동아 71쪽
정적분의 활용, 적분과 통계 익힘책, 천재교육 48쪽
[4] 일차변환과 행렬, 기하와 벡터, 미래엔 15쪽

적분과 통계, 정적분의 활용, 두산동아 78~81쪽

[5] 벡터의 내적, 기하와 벡터, 미래엔 150쪽

삼각함수의 합공식, 수학II, 더텍스트 43쪽

▣ 문항별 배점

[1] 5점
[2] 10점
[3] 10점
[4] 15점
[5] 10점

▣ 채점 가이드

[문제 1]

[1](5점) 제시문의 식 (1)에서 $b^2 = a^2 - c^2$에서 $b = 1$, $c = 1$이므로 $a = \sqrt{2}\,(a > 0)$이고, 만족하는 타원의 방정식은 다음과 같다. 타원의 방정식을 완성한 경우 [5점]

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

[2](10점) $\angle F'PF = \theta$라고 하고, $\triangle F'PF$ 에 대해 제시문의 식(3)의 제이코사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\cos\theta = \frac{(\overline{F'P})^2 + (\overline{FP})^2 - (\overline{F'F})^2}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})}$$ [3점]

이때, $\overline{F'P} + \overline{FP} = 2\sqrt{2}$, $\overline{F'F} = 2$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{(2\sqrt{2})^2 - 2(\overline{F'P})(\overline{FP}) - (2)^2}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})} = \frac{4 - 2(\overline{F'P})(\overline{FP})}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})} = \frac{2}{(\overline{F'P})(\overline{FP})} - 1$$ [3점]

제시문의 식 (4)에 의해, $\frac{\overline{F'P} + \overline{FP}}{2} = \sqrt{2} \geq \sqrt{(\overline{F'P})(\overline{FP})}$ 이므로 $2 \geq (\overrightarrow{F'P})(\overrightarrow{FP}) > 0$ 이다.

[2점]

따라서 $\cos\theta \geq 0$ 이므로 $\angle F'PF \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.

실제로 $P(x,y) = (0, \pm 1)$일 때 $\overline{F'P} = \overline{FP} = \sqrt{2}$ 이므로 $\cos\theta = 0$이다.

$\angle F'PF$는 $P(0, \pm 1)$일 때 가장 큰 각인 $\frac{\pi}{2}$를 갖는다. [2점]

[별해1] $P(0,\pm 1)$일 때 두 초점과 P점이 이루는 각은 타원의 내접원에 내접하는 삼각형의 지름에 대한 원주각에 해당한다. [5점]

이 외의 점들의 경우는 모두 내접원의 바깥쪽에 있기 때문에 $\angle F'PF$는 지름에 대한 원주각인 $\frac{\pi}{2}$보다 작거나 같아야 한다. 따라서 최대각은 $\frac{\pi}{2}$이다. [5점]

[별해2]
$F'(-1,0), F(1,0), P(x,y)$세 점으로 이루어진 삼각형$\triangle F'PF$에 대해 제시문의 제이코사인법칙을 적용한다.
$\overline{F'P}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, $\overline{FP}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, $\overline{F'F}=2$이고 $\angle F'PF=\theta$라고 하면 [2점]

$$\cos\theta=\frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2-4}{2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$ [3점]

점 $P(x,y)$가 타원위의 점이므로 방정식 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$를 만족한다. 이를 대입하면, [2점]

$$\cos\theta=\frac{(x+1)^2+1-\frac{x^2}{2}+(x-1)^2+1-\frac{x^2}{2}-4}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}$$

$$=\frac{x^2}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}$$ [1점]

이 식은 분모, 분자가 모두 양수이므로 $\cos\theta$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 $\cos\theta\geq 0$ 이고 $\angle\theta=\angle F'PF\leq\frac{\pi}{2}$이다.
실제로 $P(x,y)=(0,\pm 1)$일 때 $\overline{F'P}=\overline{FP}=\sqrt{2}$ 이므로 $\cos\theta=0$이다.
$\angle F'PF$는 $P(0,\pm 1)$일 때 가장 큰 각인 $\frac{\pi}{2}$를 갖는다. [2점]

[별해3] $\angle F'PF$은 궤도 위의 임의의 점을 P라 할 때, $\overrightarrow{F'P}$와 $\overrightarrow{FP}$벡터의 사잇각에 해당한다. $P(x,y)$에 대해에 대해 $\overrightarrow{F'P}$와 $\overrightarrow{FP}$를 좌표로 표시하면, $\overrightarrow{F'P}=(x+1,y)$, $\overrightarrow{FP}=(x-1,y)$이다. [2점]
$\angle F'PF=\theta$ 라 하면,

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{F'P_1}\bullet\overrightarrow{F'P_2}}{\left|\overrightarrow{F'P_1}\right|\left|\overrightarrow{F'P_2}\right|}=\frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2-4}{2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$ [3점]

점 $P(x,y)$가 타원위의 점이므로 방정식 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$를 만족한다. 이를 대입하면, [2점]

$$\cos\theta = \frac{(x+1)^2+1-\frac{x^2}{2}+(x-1)^2+1-\frac{x^2}{2}-4}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}$$

[1점]

이 식은 분모, 분자가 모두 양수이므로 $\cos\theta$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $\cos\theta \geq 0$이고 $\angle\theta = \angle F'PF \leq \frac{\pi}{2}$이다.

실제로 $P(x,y)=(0,\pm 1)$일 때 $\overline{F'P}=\overline{FP}=\sqrt{2}$이므로 $\cos\theta=0$이다.

$\angle F'PF$는 $P(0,\pm 1)$일 때 가장 큰 각인 $\frac{\pi}{2}$를 갖는다. [2점]

[3](10점) 궤도 위의 임의의 점 $P=(x_1,y_1)$에 대해 두 벡터를 좌표로 표시하면,

$$\overrightarrow{F'P}=(x_1+1,y_1), \overrightarrow{FP}=(x_1-1,y_1)$$ [3점]

두 벡터의 합벡터를 좌표로 표시하면,

$$\overrightarrow{F'P}+\overrightarrow{FP}=(2x_1,2y_1)$$ [2점]

따라서 본래 타원보다 두 배 궤도 반경이 큰 타원궤도가 된다. [1점]

면적이 본래 타원궤도의 네 배가 된다. [2점]

제시문의 식 (2)에서 주어진 타원의 넓이식을 이용하면, 본래 타원궤도의 넓이는

$$S=\pi ab=\pi\sqrt{2}$$ [1점]

따라서 벡터가 그리는 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$S=4\times\pi\sqrt{2}=4\pi\sqrt{2}$$ [1점]

[별해1]

$(x',y')=(2x_1,2y_1)$이고 $(\frac{x'}{2},\frac{y'}{2})=(x_1,y_1)$이므로 $(\frac{x'}{2},\frac{y'}{2})$는 (x_1,y_1)가 만족하는 타원의 방정식을 만족하므로 일차변환에 의한 (x',y')가 만족하는 타원의 방정식은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{(x')^2}{4(2)}+\frac{(y')^2}{4}=1$$ [5점]

$a=2\sqrt{2}$, $b=2$을 제시문의 식 (2)에서 주어진 타원의 넓이식에 적용하면, 벡터가 그리는 도형의 넓이 $S=\pi(2\sqrt{2})\times(2)=4\pi\sqrt{2}$ 이다. [5점]

[별해2]

$(x',y')=(2x_1,2y_1)$이고 $(\frac{x'}{2},\frac{y'}{2})=(x_1,y_1)$이므로 $(\frac{x'}{2},\frac{y'}{2})$는 (x_1,y_1)가 만족하는 타원의 방정식을 만족하므로 일차변환에 의한 (x',y')가 만족하는 타원의 방정식은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{(x')^2}{4(2)}+\frac{(y')^2}{4}=1$$ [5점]

정적분을 통해 도형의 면적을 구하면, $y'^2=4(1-\frac{x'^2}{8})$ 이고 $y'\geq 0$인 부분의 면적을 구하여 두 배하면 된다.

$$S=2\times\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,dx$$

$x=2\sqrt{2}\sin\theta;\ \ 8-x^2=8\cos^2\theta;\ \ dx=2\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ 이므로

$$S=2\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}\cos\theta(2\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta)=8\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=8\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2\theta+1}{2}d\theta=4\sqrt{2}\left[\frac{\sin2\theta}{2}+\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi\sqrt{2}$$ [5점]

[4](15점) 변환 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에 의해 $x'=y, y'=x$인 관계식이 성립하여 공간적으로 $y=x$대칭이 된다. 따라서 옮겨진 도형의 방정식은 다음과 같다.

주어진 타원 $S_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$

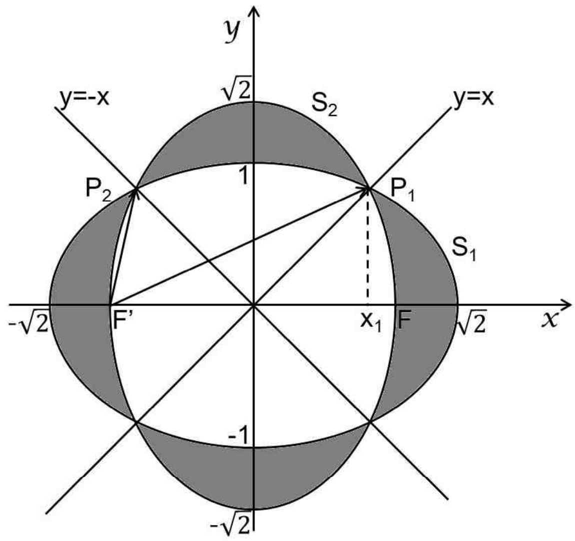
변환된 타원 $S_2:x^2+\frac{y^2}{2}=1$ [1점]

$y=x$와 타원식의 교점을 구하면 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_1^2}{1}=1$ 이므로 $\frac{3x_1^2}{2}=1$ 이고, $x_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 이다. 따라서 두 타원의 교점은 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$이다. [2점]

회전체의 부피는 πy^2을 구하면 되므로 타원식을 y^2으로 정리하면 다음과 같다.

주어진 타원 $S_1 : y^2=1-\frac{x^2}{2}$

변환된 타원 $S_2 : y^2=2(1-x^2)$



[그림 1]

좌우 대칭이므로 $x>0$인 영역의 부피를 구해서 두 배 하는 경우를 생각해보면, $[0,x_1]$영역에서는 S_2회전체에서 S_1 회전체의 부피를 빼주고, $[x_1,1]$까지는 반대로 S_1회전체에서 S_2회전체의 부피를 빼주고, $[1,\sqrt{2}]$에서는 S_1회전체만 계산해주면 된다. 따라서 회전체의 부피는 다음 식으로 구해진다.

회전체 부피의 식을 세우면,

$$\frac{V}{2}=\underbrace{\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left\{2(1-x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right\}dx}_{[2점]}+\underbrace{\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-2(1-x^2)\right\}dx}_{[2점]}+\underbrace{\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx}_{[1점]}$$

※ 혹은, 회전체 부피의 식을 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\frac{V}{2}=\underbrace{\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left\{2(1-x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right\}dx}_{[2점]}+\underbrace{\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx}_{[2점]}-\underbrace{\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}2(1-x^2)dx}_{[1점]}$$

정적분을 계산해 부피를 계산하면,

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)dx+\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\left(-1+\frac{3}{2}x^2\right)dx+\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}+\pi\left[x-\frac{1}{2}x^3\right]_1^{\sqrt{\frac{2}{3}}}+\pi\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left[\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right]+\pi\left[(\sqrt{\frac{2}{3}}-1)-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1)\right]+\pi\left[(\sqrt{2}-1)-\frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\right]$$

$$=\pi\left[\underbrace{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{9}\right)}_{[2점]}+\underbrace{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-1-\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{1}{2}\right)}_{[2점]}+\underbrace{\left(\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}\right)}_{[1점]}\right]=\pi\left[\frac{4\sqrt{6}}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\right]$$

따라서 구하는 부피는 $V=\pi\left[\frac{8\sqrt{6}}{9}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{8}{3}\right]$이다. [2점]

[5](10점) 두 점을 잇는 벡터를 구하면,

$$\overrightarrow{F'P_1}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \overrightarrow{F'P_2}=\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$ [3점]

이 두 벡터를 내적하면 다음과 같이 두 벡터가 이루는 각에 대한 코사인 값을 구할 수 있다.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{F'P_1}\cdot\overrightarrow{F'P_2}}{|\overrightarrow{F'P_1}||\overrightarrow{F'P_2}|}=\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{\frac{7}{3}+2\sqrt{\frac{2}{3}}}\sqrt{\frac{7}{3}-2\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

$$=\frac{\left(-\frac{2}{3}+1+\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{49}{9}-4\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{49-24}}{3}}=\frac{3}{5}$$ [5점]

이는 빗변의 길이가 5, 밑변의 길이가 3인 직각삼각형으로부터 얻는 값과 같으므로 $\tan\theta=\frac{4}{3}$이다. [2점]

[별해] $\angle P_1F'F=\alpha$, $\angle P_2F'F=\beta$ 이면

$$\tan(\alpha)=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-2$$ [2점]

$$\tan(\beta)=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}+2$$ [2점]

이므로 제시문의 식 (6)을 이용하면 $\overrightarrow{F'P_1}$과 $\overrightarrow{F'P_2}$의 사잇각을 구할 수 있다.

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3}$$ [6점]

▣ 풀이예시

[문제1]

[1] 제시문의 식 (1)에서 $b^2 = a^2 - c^2$에서 $b = 1$, $c = 1$이므로 $a = \sqrt{2}\,(a > 0)$이고, 만족하는 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

[2] $\angle F'PF = \theta$라고 하자. 이때, $\triangle F'PF$ 에 대해 제시문 식 (3)의 제이코사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\cos\theta = \frac{(\overline{F'P})^2 + (\overline{FP})^2 - (\overline{F'F})^2}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})} \quad = \frac{(\overline{F'P} + \overline{FP})^2 - 2(\overline{F'P})(\overline{FP}) - (\overline{F'F})^2}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})}$$

이때, $\overline{F'P} + \overline{FP} = 2\sqrt{2}\,, \overline{F'F} = 2$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{(2\sqrt{2})^2 - 2(\overline{F'P})(\overline{FP}) - (2)^2}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})} = \frac{4 - 2(\overline{F'P})(\overline{FP})}{2(\overline{F'P})(\overline{FP})} = \frac{2}{(\overline{F'P})(\overline{FP})} - 1$$

제시문의 식 (4)에 의해, $\dfrac{\overline{F'P} + \overline{FP}}{2} = \sqrt{2} \geq \sqrt{(\overline{F'P})(\overline{FP})}$ 이므로 $2 \geq (\overline{F'P})(\overline{FP}) > 0$ 이다.

따라서 $\cos\theta \geq 0$ 이므로 $\angle F'PF \leq \dfrac{\pi}{2}$이다.

실제로 $P(x,y) = (0,\pm 1)$일 때 $\overline{F'P} = \overline{FP} = \sqrt{2}$ 이므로 $\cos\theta = 0$이다.

$\angle F'PF$는 $P(0,\pm 1)$일 때 가장 큰 각인 $\dfrac{\pi}{2}$를 갖는다.

[별해1] $P(0,\pm 1)$일 때 두 초점과 P점이 이루는 각은 타원의 내접원에 내접하는 삼각형의 지름에 대한 원주각에 해당한다. 이 외의 점들의 경우는 모두 내접원의 바깥쪽에 있기 때문에 $\angle F'PF$는 지름에 대한 원주각인 $\dfrac{\pi}{2}$보다 작거나 같아야 한다. 따라서 최대각은 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

[별해2] $F'(-1,0), F(1,0), P(x,y)$세 점으로 이루어진 삼각형$\triangle F'PF$에 대해 제시문 식 (3)의 제이코사인법칙을 적용한다. $\overline{F'P} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $\overline{FP} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $\overline{F'F} = 2$이고 $\angle F'PF = \theta$라고 하면

$$\cos\theta = \frac{(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 - 4}{2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\,\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

점 $P(x,y)$가 타원위의 점이므로 방정식 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$를 만족한다. 이를 대입하면,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{(x+1)^2+1-\frac{x^2}{2}+(x-1)^2+1-\frac{x^2}{2}-4}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}} \\ &= \frac{x^2}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}\end{aligned}$$

이 식은 분모, 분자가 모두 양수이므로 $\cos\theta$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $\cos\theta \geq 0$ 이고 $\angle\theta = \angle F'PF \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.

실제로 $P(x,y)=(0,\pm 1)$일 때 $\overline{F'P}=\overline{FP}=\sqrt{2}$ 이므로 $\cos\theta=0$이다.

$\angle F'PF$는 $P(0,\pm 1)$일 때 가장 큰 각인 $\frac{\pi}{2}$를 갖는다.

[별해3] $\angle F'PF$은 궤도 위의 임의의 점을 P라 할 때, $\overrightarrow{F'P}$와 $\overrightarrow{FP}$벡터의 사잇각에 해당한다. $P(x,y)$에 대해 에 대해 $\overrightarrow{F'P}$와 $\overrightarrow{FP}$를 좌표로 표시하면, $\overrightarrow{F'P}=(x+1,y)$, $\overrightarrow{FP}=(x-1,y)$이다.
$\angle F'PF=\theta$ 라 하면,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{F'P_1}\cdot\overrightarrow{F'P_2}}{|\overrightarrow{F'P_1}||\overrightarrow{F'P_2}|} = \frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2-4}{2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

점 $P(x,y)$가 타원위의 점이므로 방정식 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$를 만족한다. 이를 대입하면,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{(x+1)^2+1-\frac{x^2}{2}+(x-1)^2+1-\frac{x^2}{2}-4}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}} \\ &= \frac{x^2}{2\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}\end{aligned}$$

이 식은 분모, 분자가 모두 양수이므로 $\cos\theta$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $\cos\theta \geq 0$ 이고 $\angle\theta = \angle F'PF \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.

실제로 $P(x,y)=(0,\pm 1)$일 때 $\overline{F'P}=\overline{FP}=\sqrt{2}$ 이므로 $\cos\theta=0$이다.

$\angle F'PF$는 $P(0,\pm 1)$일 때 가장 큰 각인 $\frac{\pi}{2}$를 갖는다.

[3] 궤도 위의 임의의 점 $P=(x_1, y_1)$에 대해 두 벡터를 좌표로 표시하면,

$$\overrightarrow{F'P}=(x_1+1, y_1), \overrightarrow{FP}=(x_1-1, y_1)$$ 이고,

두 벡터의 합벡터를 좌표로 표시하면,

$$\overrightarrow{F'P}+\overrightarrow{FP}=(2x_1, 2y_1)$$ 이다.

따라서 본래 타원보다 두 배 궤도 반경이 큰 타원궤도가 되어, 면적이 본래 타원궤도의 네 배가 된다. 제시문 식 (2)에서 주어진 타원의 넓이식을 이용하면, 본래 타원궤도의 넓이는 $S=\pi ab=\pi\sqrt{2}$ 이다. 그러므로, 벡터가 그리는 도형의 넓이는 $S=4\times\pi\sqrt{2}=4\pi\sqrt{2}$ 이다.

[별해1]

$(x', y')=(2x_1, 2y_1)$이고 $(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2})=(x_1, y_1)$이므로 $(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2})$는 (x_1, y_1)가 만족하는 타원의 방정식을 만족하므로 일차변환에 의한 (x', y')가 만족하는 타원의 방정식은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{(x')^2}{4(2)}+\frac{(y')^2}{4}=1$$

$a=2\sqrt{2}$, $b=2$을 제시문의 식 (2)에서 주어진 타원의 넓이 식에 적용하면, 벡터가 그리는 도형의 넓이 $S=\pi(2\sqrt{2})\times(2)=4\pi\sqrt{2}$ 이다.

[별해2]

$(x', y')=(2x_1, 2y_1)$이고 $(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2})=(x_1, y_1)$이므로 $(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2})$는 (x_1, y_1)가 만족하는 타원의 방정식을 만족하므로 일차변환에 의한 (x', y')가 만족하는 타원의 방정식은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{(x')^2}{4(2)}+\frac{(y')^2}{4}=1$$

정적분을 통해 도형의 면적을 구하려면, $y'=\sqrt{\left(1-\frac{x'^2}{8}\right)}$ 이고 $y'\geq 0$인 부분의 면적을 구하여 두 배하면 된다.

$$S=2\times\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,dx$$

$x=2\sqrt{2}\sin\theta;\ \ 8-x^2=8\cos^2\theta;\ \ dx=2\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ 이므로,

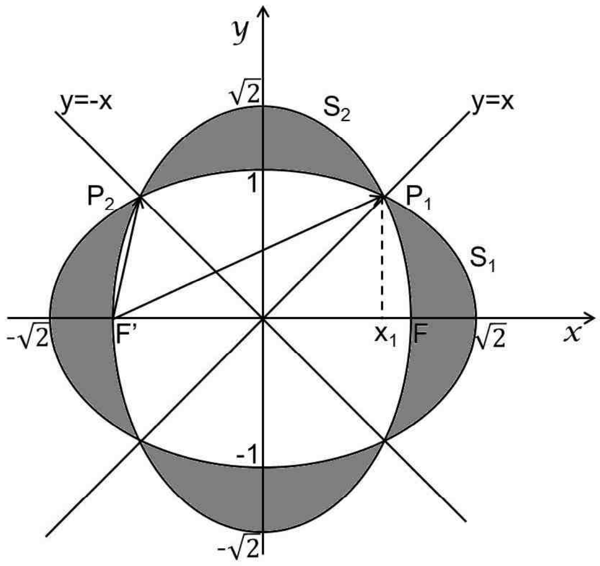
$$S=2\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}\cos\theta(2\sqrt{2}\cos\theta d\theta)=8\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=8\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2\theta+1}{2}d\theta=4\sqrt{2}\left[\frac{\sin2\theta}{2}+\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi\sqrt{2}$$

[4] 변환 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\ 1\\1\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에 의해 $x'=y, y'=x$인 관계식이 성립하여 공간적으로 $y=x$대칭이 된다. 따라서 옮겨진 도형의 방정식은 다음과 같다.

주어진 타원 $S_1: \frac{x^2}{2}+y^2=1$

변환된 타원 $S_2: x^2+\frac{y^2}{2}=1$



[그림1]

$y=x$와 타원식의 교점을 구하면 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_1^2}{1}=1$이므로 $\frac{3x_1^2}{2}=1$이고, $x_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$이다. 따라서 두 타원의 교점은 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$이다.

회전체의 부피는 πy^2을 구하면 되므로 타원식을 y^2으로 정리하면 다음과 같다.

주어진 타원 $S_1: y^2=1-\frac{x^2}{2}$

변환된 타원 $S_2: y^2=2(1-x^2)$

좌우 대칭이므로 $x>0$인 영역의 부피를 구해서 두 배 하는 경우를 생각해보면, $[0,x_1]$영역에서는 S_2회전체에서 S_1 회전체의 부피를 빼주고, $[x_1,1]$까지는 반대로 S_1회전체에서 S_2회전체의 부피를 빼주고, $[1,\sqrt{2}]$에서는 S_1회전체만 계산해주면 된다. 따라서 회전체의 부피는 다음 식으로 구해진다.
(혹은, $[0,x_1]$영역에서는 S_2회전체에서 S_1 회전체의 부피를 빼주고, $[x_1,\sqrt{2}]$ 영역에서 S_1회전체의 부피를 구하고 $[x_1,1]$영역에서 S_2회전체의 부피를 빼주어도 됨.)

회전체 부피의 식을 세우면,

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left\{2(1-x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right\}dx+\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-2(1-x^2)\right\}dx+\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

※ 혹은, 회전체 부피의 식을 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left\{2(1-x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right\}dx+\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx-\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}2(1-x^2)dx$$

정적분을 계산해 부피를 계산하면,

$$\begin{aligned}\frac{V}{2}&=\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)dx+\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1}\left(-1+\frac{3}{2}x^2\right)dx+\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx\\&=\pi\left[x-\frac{1}{2}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}+\pi\left[x-\frac{1}{2}x^3\right]_1^{\sqrt{\frac{2}{3}}}+\pi\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_1^{\sqrt{2}}\\&=\pi\left[\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right]+\pi\left[(\sqrt{\frac{2}{3}}-1)-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1)\right]+\pi\left[(\sqrt{2}-1)-\frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\right]\\&=\pi\left[\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{\sqrt{6}}{3}-1-\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}\right]=\pi\left[\frac{4\sqrt{6}}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\right]\end{aligned}$$

따라서 구하는 부피는 $V=\pi\left[\frac{8\sqrt{6}}{9}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{8}{3}\right]$이다.

[5] 두 점을 잇는 벡터를 구하면,

$$\overrightarrow{F'P_1}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \overrightarrow{F'P_2}=\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

제시문의 식 (5)에 두 벡터를 대입하면 두 벡터가 이루는 각에 대한 코사인 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{F'P_1}\cdot\overrightarrow{F'P_2}}{\left|\overrightarrow{F'P_1}\right|\left|\overrightarrow{F'P_2}\right|}=\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{\frac{7}{3}+2\sqrt{\frac{2}{3}}}\sqrt{\frac{7}{3}-2\sqrt{\frac{2}{3}}}}\\&=\frac{\left(-\frac{2}{3}+1+\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{49}{9}-4\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{49-24}}{3}}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

이는 빗변의 길이가 5, 밑변의 길이가 3인 직각삼각형으로부터 얻는 값과 같으므로 $\tan\theta=\frac{4}{3}$이다.

[별해] $\angle P_1F'F=\alpha$, $\angle P_2F'F=\beta$ 이면,

$$\tan(\alpha)=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-2$$

$$\tan(\beta)=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}+2$$

이므로, 제시문의 식 (6)을 이용하면 $\overrightarrow{F'P_1}$과 $\overrightarrow{F'P_2}$의 사잇각에 대해 다음을 얻는다.

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3}$$

[문제 2]

▣ 출제의도

[문제 2] 원점이 중심인 원 위의 점을 각 θ(라디안)을 써서 나타낼 수 있는지, 원 위의 점에서 접선의 방정식을 구할 수 있는지, 그리고 간단한 도형의 면적을 θ를 사용하여 정확하게 계산할 수 있는지, 구한 도형의 면적의 비의 극한값을 바르게 계산하는 몇 개의 문제를 통해 대학에서 수학(修學)하는 데 요구되는 종합적으로 문제를 이해·분석하고 해결하는 능력과 적정한 수준의 수리적 지식과 계산 능력, 그리고 논리적 전개능력 등을 갖추고 있는지를 평가하고자 한다. 특히, 식의 등식 변형, 함수의 극한에 관한 성질, 미분계수의 정의와 접선의 방정식의 의미, 롤의 정리의 활용 및 교과서에서 배운 증명 방법을 활용하여 간단한 부정형의 극한을 다룰 수 있는 방법을 단계적으로 제시된 문제를 통해 증명하고 그를 활용한 문제를 해결에 관한 수리적인 이해력과 적용 능력을 평가한다. 각 문항의 출제 의도는 다음과 같다.

[1] 교과서에서 배운 증명 방법을 습득하고 활용하여 주어진 문제를 해결하는 능력을 평가
[2] 지시에 따라 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가
[3] 중심이 원 둘레의 점을 각 θ(라디안)의 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있는지를 평가
[4] 여러 가지 도형의 면적을 바르게 구하는 수학적 지식과 계산력을 평가
[5] 문항[2]에서 얻은 결과의 의미를 잘 이해하여 요구되는 문제를 해결에 적절히 활용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

제시문

[우극한과 좌극한] 좋은책 신사고, 수학 Ⅱ, 77~78쪽
[삼각함수의 극한] 좋은책 신사고, 수학 Ⅱ, 83쪽, 85쪽
[함수의 극한에 관한 성질] 천재교육, 수학 Ⅱ, 68쪽
[미분계수와 미분가능] 금성출판사, 수학 Ⅱ, 121쪽
[접선의 방정식] 천재교육, 수학 Ⅱ, 146쪽
[롤의 정리] 금성출판사, 수학 Ⅱ, 172쪽

문제

[1] 수학 Ⅱ, 172쪽, 롤의 정리, 금성출판사
수학 Ⅱ, 68쪽, 함수의 극한에 관한 성질, 천재교육
[2] 수학 Ⅱ, 68쪽, 함수의 극한에 관한 성질, 천재교육
[3] 수학 Ⅱ, 146쪽, 접선의 방정식, 천재교육
수학, 306쪽, 일반각 θ의 삼각함수, 대한교과서
[4] 수학, 304쪽, 부채꼴의 넓이, 대한교과서
[5] 수학 Ⅱ, 83쪽, 85쪽, 삼각함수의 극한, 좋은책 신사고,
수학 Ⅱ, 77~78쪽, 우극한과 좌극한, 좋은책 신사고

▣ 문항별 배점

[1] 10점
[2] 10점
[3] 10점
[4] 9점
[5] 11점

▣ 채점 가이드

[문제 2]

[1](10점) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하며 $g(a) \neq g(b)$ 이므로 식 ①에서 주어진 함수 $F(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하다. [2점]
또한 분명히 $F(a) = F(b) = f(b) - f(a)$ 이므로 [2점]
제시문의 [롤의 정리]에 의하면 다음을 만족시키는 실수 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

$$F'(c) = 0$$ [2점]

여기서 $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$이고 위의 식에서 다음을 얻는다.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$ [2점]

구간 (a,b)에서 $g'(x) \neq 0$이므로 정리하여 다음을 얻는다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ [2점]

[2](10점) 점 $s \in (a,b)$와 주어진 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(s) = 0,\ g(s) = 0$이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(s)}{g(x)-g(s)}$$ [2점]

여기서 $x \neq s$이면 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(s)}{g(x)-g(s)} = \frac{\frac{f(x)-f(s)}{x-s}}{\frac{g(x)-g(s)}{x-s}}$$ [2점]

조건에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = s$에서 미분가능하다. 즉 다음의 극한값이 존재한다.

$$\lim_{x\to s}\frac{f(x)-f(s)}{x-s}=f'(s),\ \lim_{x\to s}\frac{g(x)-g(s)}{x-s}=g'(s)$$ [2점]

또 조건에서 구간 (a,b)에서 $g'(x)\neq 0$이므로 $g'(s)\neq 0$이다. [1점]
이제 제시문의 [함수의 극한에 관한 성질]을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to s}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(s)}{g'(s)}$$ [3점]

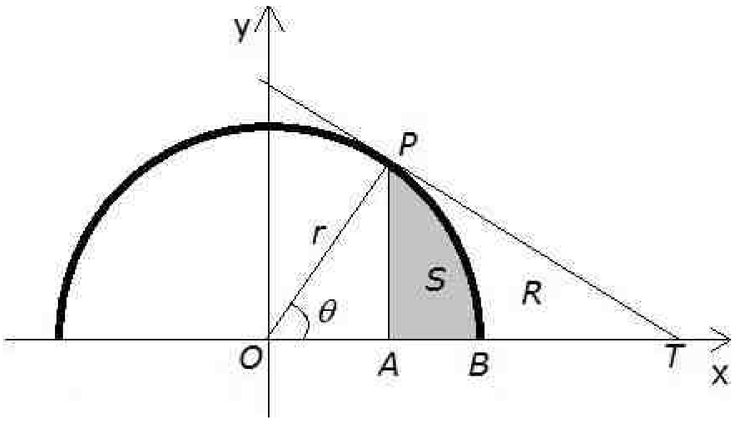
※ <u>문항 [1]을 이용하는 경우</u>: $f'(x), g'(x)$가 연속이라는 조건이 없으므로 식

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(s)}{g(x)-g(s)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

에서 $x\to s$ 일 때($c\to s$일 때) 우변의 극한값이 $\frac{f'(s)}{g'(s)}$이라고 할 수 없다. **이 경우는 [2점]까지만 부여함.**

[3](10점) <그림 1>에서 직각삼각형 OPA를 참조하면 점 P의 좌표는 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 이다. [2점]
따라서 점 A의 좌표는 $A(r\cos\theta, 0)$이다. [2점]
점 B의 좌표는 분명히 $B(r,0)$이다. [1점]

한편 점 P에서의 접선의 방정식은 주어진 반원을 함수 $y=\sqrt{r^2-x^2}$의 그래프로 나타낼 수 있으므로 그의 도함수를 이용하여 구할 수 있다.
$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$이므로 $x=r\cos\theta$이면 구하는 접선의 기울기는 $-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.



<그림 1>

$$y=r\sin\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-r\cos\theta)$$ [3점]

점 T의 좌표는 위의 접선의 x절편 이므로 $T(\frac{r}{\cos\theta}, 0)$이다. [2점]

[별해1: 접선의 방정식] 점 P에서의 접선의 기울기는 직선 OP의 기울기가 $\tan\theta$이고 접선은 직선 OP와 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$이다. 점 $P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=r\sin\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-r\cos\theta)$$ [3점]

[별해2: 접선의 방정식] 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1,y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

이고 $P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$이므로 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\cos\theta\ x+\sin\theta\ y=r$$ [3점]

[별해: T의 좌표] 점 T의 x좌표를 q라고 하면 직각삼각형 $\triangle OPT$에서 $\cos\theta=\dfrac{r}{q}$임을 알 수 있다.

따라서 점 T의 좌표는 $T(\dfrac{r}{\cos\theta},\ 0)$이다. [2점]

[4](9점) <그림1>에서 도형 PAB의 면적 S는 (부채꼴 OPB의 면적)−(직각삼각형 OPA의 면적)이다.

(부채꼴 OPB의 면적)$=\dfrac{1}{2}r^2\theta$, [1점]

(직각삼각형 OPA의 면적) = $\dfrac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta$ [1점]

따라서 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}r^2(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta)$$ [3점]

한편 도형 PBT의 면적 R는 (직각삼각형 OPT의 면적) − (부채꼴 OPB의 면적) 이다.
(직각삼각형 OPT의 면적)은 $\dfrac{1}{2}r\sin\theta\dfrac{r}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}r^2\tan\theta$이므로 [1점]

$$R=\frac{1}{2}r^2(\tan\theta-\theta)$$ [3점]

[5](11점) 문항 [4]로부터 Q,R,S는 다음과 같고, 모두 $\theta=0$을 포함하는 어떤 구간에서 정의된다.

$$Q=\frac{1}{4}r^2\sin2\theta,\quad S=\frac{1}{2}r^2(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta),\quad R=\frac{1}{2}r^2(\tan\theta-\theta)$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{R}{Q}=\frac{\tan\theta-\theta}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=2\frac{\tan\theta-\theta}{\sin2\theta}$$ [1점]

여기서 $\frac{R}{Q}$의 분모와 분자의 $\theta\to0$일 때의 극한값이 모두 0이고, 또 $(\sin2\theta)'=2\cos2\theta$이므로 $\theta=0$에서 $(\sin2\theta)'=2\neq0$이다. 여기서 문항 [2]를 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{R}{Q}=\lim_{\theta\to0}2\frac{\tan\theta-\theta}{\sin2\theta}=2\frac{\sec^2 0-1}{2\cos0}=\frac{0}{2}=0$$ [2점]

한편 S'과 R'은 다음과 같다.

$$S'=\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2(1-\cos2\theta),\ R'=\frac{dR}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2(\sec^2\theta-1)$$ [3점]

여기서 제시문의 [삼각함수의 항등식]과 삼각함수의 정의를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{S'}{R'}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos2\theta}{\sec^2\theta-1}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin^2\theta}{\tan^2\theta}=\lim_{\theta\to0}2\cos^2\theta=2$$ [3점]

따라서 제시문의 [우극한과 좌극한]에 의하면 구하는 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0+0}\frac{R}{Q}=0,\ \lim_{\theta\to0+0}\frac{S'}{R'}=2$$ [2점]

※ 극한을 구할 때 (교육과정에는 없지만) 로피탈의 정리를 (언급이 없이) 사용하여 바르게 구할 경우도 제시된 점수 부여.

▣ 풀이 예시

[문제 2]

[1] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하며 $g(a) \neq g(b)$이므로 식 ①에서 주어진 함수 $F(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하다. 또한 분명히 $F(a) = F(b) = f(b) - f(a)$ 이므로 제시문의 [롤의 정리]에 의하면 다음을 만족시키는 실수 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

$$F'(c) = 0$$

여기서 $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$이고 위의 식에서 다음을 얻는다.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

구간 (a,b)에서 $g'(x) \neq 0$이므로 정리하여 다음을 얻는다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[2] 점 $s \in (a,b)$와 주어진 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(s) = 0,\ g(s) = 0$이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(s)}{g(x)-g(s)}$$

여기서 $x \neq s$이면 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(s)}{g(x)-g(s)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(s)}{x-s}}{\dfrac{g(x)-g(s)}{x-s}}$$

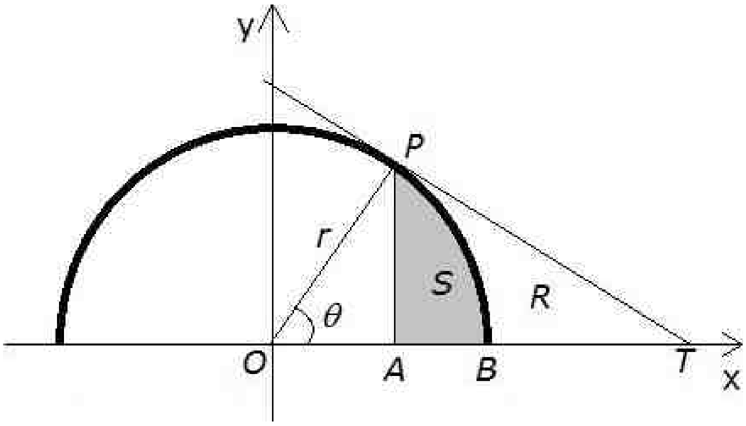
조건에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = s$에서 미분가능하다. 즉 다음의 극한값이 존재한다.

$$\lim_{x \to s} \frac{f(x)-f(s)}{x-s} = f'(s),\ \lim_{x \to s} \frac{g(x)-g(s)}{x-s} = g'(s)$$

또 조건에서 구간 (a,b)에서 $g'(x) \neq 0$이므로 $g'(s) \neq 0$이다. 제시문의 [함수의 극한에 관한 성질]을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$$

[3] <그림 1>에서 직각삼각형 OPA를 참조하면 점 P의 좌표는 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 이다. 따라서 점 A의 좌표는 $A(r\cos\theta, 0)$이다. 점 B의 좌표는 분명히 $B(r, 0)$이다.
한편 점 P에서의 접선의 방정식은 주어진 반원을 함수 $y=\sqrt{r^2-x^2}$의 그래프로 나타낼 수 있으므로 그의 도함수를 이용하여 구할 수 있다. $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$이므로 $x=r\cos\theta$이면 구하는 접선의 기울기는 $-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.



<그림 1>

$$y=r\sin\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-r\cos\theta)$$

점 T의 좌표는 위의 접선의 x절편 이므로 $T(\dfrac{r}{\cos\theta}, 0)$이다.

[별해: 접선의 방정식] 점 P에서의 접선의 기울기는 직선 OP의 기울기가 $\tan\theta$이고 접선은 직선 OP와 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$이다. 점 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=r\sin\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-r\cos\theta)$$

[별해: T의 좌표] 점 T의 x좌표를 q라고 하면 직각삼각형 $\triangle OPT$에서 $\cos\theta=\dfrac{r}{q}$임을 알 수 있다.
따라서 점 T의 좌표는 $T(\dfrac{r}{\cos\theta}, 0)$이다.

[4] <그림1>에서 도형 PAB의 면적 S는 (부채꼴 OPB의 면적)−(직각삼각형 OPA의 면적)이다.

(부채꼴 OPB의 면적)$=\dfrac{1}{2}r^2\theta$,

(직각삼각형 OPA의 면적) = $\dfrac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta$

따라서 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}r^2(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

한편 도형 PBT의 면적 R는 (직각삼각형 OPT의 면적) − (부채꼴 OPB의 면적) 이다.

(직각삼각형 OPT의 면적)= $\frac{1}{2}r\sin\theta\frac{r}{\cos\theta}=\frac{1}{2}r^2\tan\theta$이므로

$$R=\frac{1}{2}r^2(\tan\theta-\theta)$$

[5] 문항 [4]로부터 Q,R,S는 다음과 같다고 모두 $\theta=0$을 포함하는 어떤 구간에서 정의된다.

$$Q=\frac{1}{4}r^2\sin2\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta),\quad R=\frac{1}{2}r^2(\tan\theta-\theta)$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{R}{Q}=\frac{\tan\theta-\theta}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=2\frac{\tan\theta-\theta}{\sin2\theta}$$

여기서 $\frac{R}{Q}$의 분모와 분자의 $\theta\to0$일 때의 극한값이 모두 0이고, 또 $(\sin2\theta)'=2\cos2\theta$이므로 $\theta=0$에서 $(\sin2\theta)'=2\neq0$이다. 여기서 문항 [2]를 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{R}{Q}=\lim_{\theta\to0}2\frac{\tan\theta-\theta}{\sin2\theta}=2\frac{\sec^2 0-1}{2\cos0}=\frac{0}{2}=0$$

한편 S'과 R'은 다음과 같다.

$$S'=\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2(1-\cos2\theta),\ R'=\frac{dR}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2(\sec^2\theta-1)$$

여기서 제시문의 [삼각함수의 항등식]과 삼각함수의 정의를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{S'}{R'}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos2\theta}{\sec^2\theta-1}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin^2\theta}{\tan^2\theta}=\lim_{\theta\to0}2\cos^2\theta=2$$

따라서 제시문의 [우극한과 좌극한]에 의하면 구하는 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0+0}\frac{R}{Q}=0,\ \lim_{\theta\to0+0}\frac{S'}{R'}=2$$