STEP 2. 나의 문제점 분석하기

수학

출제 제시문

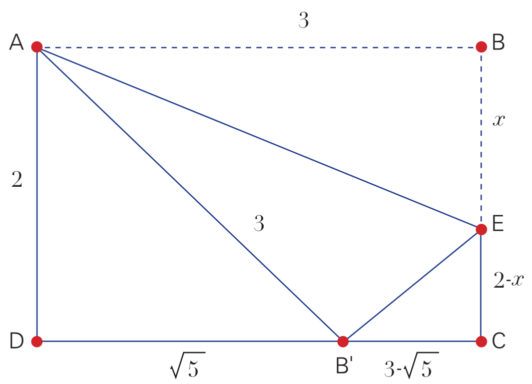
[제시문 1]
(가) 교학사 미적분 Ⅱ 51쪽
(나) 천재교육(이준열) 미적분학 Ⅱ 117쪽
(다) 천재교육 수학 Ⅰ 204쪽
[제시문 2]
(가) 좋은책 신사고 기하와 벡터 174쪽

01 출제의도 파악하기

● 고교 수학의 전반적인 학습 정도를 측정하기 위해 미적분, 기하와 벡터 등 고교 수학 핵심 분야를 위주로 출제하였다. 모든 제시문은 교과서에서 출제하여 학업 열중도를 파악하고자 하였다.

02 모범답안 VS 나의답안

[문제 1-1]



$\overline{AB'}=3$, $\overline{AD}=2$ 이므로 $\overline{B'D}=\sqrt{5}$ 이다.
$\overline{BE}=x$ 라 하면, $\overline{B'E}=x$, $\overline{CE}=2-x$, $\overline{B'C}=3-\sqrt{5}$ 이므로

$x^2=(2-x)^2+(3-\sqrt{5})^2$ 이 성립한다. 이 방정식을 풀면, $x=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$ 이다.

그러므로 $\tan\angle EAB=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}}{3}=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{6}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 이다.

[문제 1-2]

꼭짓점 B가 옮겨져서 변 CD 위에 놓인 점을 B'라고 하면 $\angle FGB'=\angle FGB$이다.
그러므로 $\angle B'GC=\pi-2\angle FGB$이다. 이제 선분 $\overline{FG}=l$, $\overline{BG}=x$, $\angle FGB=t$라고 하면
$l\cos t=x$, $x\cos(\pi-2t)=2-x$ 이다. 이 두 식에서 x 를 소거하여 l을 t 의 식으로 정리하면

$$l=\frac{2}{\cos t\,(1-\cos 2t)}=\frac{1}{\cos t\,(1-\cos^2 t)}$$

이제, $\cos t=s$ 로 치환하면, 함수 $g(s)=s(1-s^2)$, $0<s<1$ 은 $s=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때 최댓값 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ 을 가지므로 l 은 $s=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때 최솟값 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다. 이때, $\overline{FG}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{FB}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\tan\angle GFB=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{FB}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

[풀이 2]

선분 $\overline{BG}=s$, $\overline{BF}=t$라 하면 직선 GF의 기울기는 $-\frac{s}{t}$이므로 직선 BB'의 기울기는 $\frac{t}{s}$ 이다($1 < s < 2$). 따라서 직선 BB'의 방정식은 $y=\frac{t}{s}(x-3)+2$ 이다. 이를 이용하여 점 B'의 좌표를 구하면, $B'=(3-\frac{2s}{t}, 0)$이다. 이로부터 $\overline{CB'}=\frac{2s}{t}$임을 알 수 있다. $(\overline{CB'})^2+(\overline{CG})^2=(\overline{B'G})^2$이므로 $(\frac{2s}{t})^2+(2-s)^2=s^2$이 성립한다.

이 식을 정리하면 $t^2=\frac{s^2}{s-1}$ 을 얻는다. 이제 $\overline{FG^2}=s^2+t^2=s^2+\frac{s^2}{s-1}=s^2+s+1+\frac{1}{s-1}$가 최솟값을 갖게 되는 s의 값을 구하기 위하여 함수 $f(s)=s^2+s+1+\frac{1}{s-1}$ 를 미분하면

$f'(s)=\frac{s^2(2s-3)}{(s-1)^2}$ 이므로 $s=\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다. 이때 t의 값은 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

그러므로 $\tan\angle GFB=\frac{FG}{FB}=\frac{s}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

[문제 2-1]

중심이 $(1,1,0)$인 원을 포함하는 평면은 법선벡터가 $(1,1,0)$이고 점 $(1,1,0)$을 포함한다. 따라서 이 평면의 방정식은 $1(x-1)+1(y-1)=0$이다. 마찬가지로 하면, 중심이 $(0,1,1)$인 원을 포함하는 평면의 방정식은 $1(y-1)+1(z-1)=0$이다.

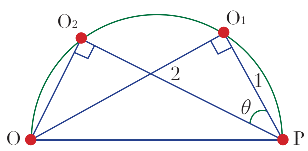
두 원의 교점은 평면 $1(x-1)+1(y-1)=0$과 $1(y-1)+1(z-1)=0$의 교선 위에 있으므로 교점 P, Q는 두 평면의 교선 $l: x-1=-(y-1)=z-1$ 위에 있다. 교선 l과 구 $x^2+y^2+z^2=9$의 교점이 P, Q이므로 방정식 $x-1=-(y-1)=z-1$과 $x^2+y^2+z^2=9$을 연립하여 풀면 P, Q는 점 $\left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}, \frac{4-\sqrt{19}}{3}, \frac{2+\sqrt{19}}{3}\right)$과 $\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}, \frac{4+\sqrt{19}}{3}, \frac{2-\sqrt{19}}{3}\right)$ 이다. 그러므로 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{\frac{76}{3}}$ 이다.

[문제 2-2]

평면 α위의 원과 β 위의 원의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 두 원의 교점을 P, 두 평면 α와 β의 교선을 l이라 하자.

평면 α에서 직선 l과 주어진 원은 점 P에서만 만나므로 원의 중심 O_1과 점 P를 연결한 직선은 l에 수직이다. 원의 중심 O_1이 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발이므로 삼수선의 정리에 의하여 직선 OP는 l에 수직이다. 직선 O_2P 도 l에 수직이므로 점 O, O_1, O_2, P는 같은 평면 위에 있다.

따라서 $\angle O_1PO_2=\angle O_1PO-\angle O_2PO$이다.



$\angle O_1PO=\theta_1$, $\angle OPO_2=\theta_2$라 하면, $\cos\theta_1=\frac{1}{3}$, $\cos\theta_2=\frac{1}{2}$ 이다.

$\angle O_1PO_2$가 두 평면 α와 β의 이면각이므로 $\cos\theta=\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$이다.