[경북대학교 문항정보: 논술]

[문항카드 11]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2 / 수학 2-1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	순열, 조합, 이항분포, 정규분포
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

가) (1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_\mathrm{r}=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\cdots(\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n개에서 $r\,(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_\mathrm{r}=\frac{{}_\mathrm{n}\mathrm{P}_\mathrm{r}}{\mathrm{r}!}=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{r}!(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$$

이다. (단, ${}_n\mathrm{C}_0=1$이다.)

(3) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

(나) 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하자.

(1) 확률변수 X가 갖는 값은 $0, 1, 2, \cdots, n$이고, X의 확률질량함수는 독립시행의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}\ \ (x=0,1,2,\cdots,n)$$

이며, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\,p)$를 따른다고 한다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\,p)$를 따를 때

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}\quad (\text{단, } q=1-p)$$

이다.

(다) 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다고 할 때, 양수 z에 대하여 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le z)$는 다음과 같은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[문항]

【1-1】 학생 A가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건

$$m_2 - m_1 \ge 3,\ m_3 - m_2 \ge 3$$

을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1월, m_2월, m_3월을 선택할 수 있는 모든 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)의 개수를 구하시오. (30점)

【1-2】 여덟 개의 면 중 k개의 면에는 빨간색이 각각 칠해져 있고, 나머지 면에는 파란색이 각각 칠해져 있는 정팔면체 모양의 물체가 있다. 이 물체를 n번 던져서 지면에 닿은 면이 빨간색이 되는 횟수를 X라 하자. 확률변수 X가 다음의 조건을 만족시킬 때, k와 n의 값을 구하시오.(단, 각각의 면에는 한 가지 색만 칠해져 있다.) (30점)

(a) $\mathrm{E}(X) = 4\mathrm{V}(X)$

(b) $\mathrm{P}(X=1) = 30\mathrm{P}(X=0)$

【1-3】 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{4}{(2m+1)^2}\right)$를 따른다고 한다. $\mathrm{P}(X \le 4) = 0.9772$일 때, 양수 m의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

본 문제는 순열과 조합을 활용하여 경우의 수를 구하고, 확률을 구하고, 확률분포를 이해하고 있는지를 평가하고자 한다.

1-1 순열, 조합 그리고 중복조합의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 주어진 상황에 대한 경우의 수를 구할 수 있다.
1-2 이항분포의 뜻과 그 확률질량함수를 이해하고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
1-3 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ②순열과 조합 1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 4. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1341-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.
문항1-1	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ②순열과 조합 1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 4. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
문항1-2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
문항1-3	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1341-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외 24명	동아출판	2014	10-67 160-179
	확률과 통계	김원경 외 11명	비상교육	2014	11-35 109-121
	확률과 통계	류희찬 외 17명	천재교과서	2014	12-41 131-147
	확률과 통계	황선욱 외 10명	좋은책 신사고	2014	12-37 107-121

5. 문항 해설

1-1 문항은 중복조합을 이해하고 이를 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.
1-2 문항은 이항분포에 대한 확률질량함수의 특징을 이해하고 이를 통해 평균과 표준편차를 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.
1-3 정규분포의 뜻을 알고 그 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	1. $x_1+x_2+x_3+x_4=9$, $x_1,x_4 \geq 0$, $x_2,x_3 \geq 2$의 관계식을 구하면 10점 2. $x_1+y_2+y_3+x_4=5$, $x_1,y_2,y_3,x_4 \geq 0$의 관계식을 구하면 10점 3. 관계식과 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하면 10점 중복조합을 이용하지 않고 직접 경우의 수를 구하면 30점	30
1-2	1. 조건 (a)를 이용하여 $p=\frac{3}{4}$을 구하면 10점 2. $p=\frac{3}{4}$을 이용하여 $k=6$을 구하면 10점 3. $p=\frac{3}{4}$과 조건 (b)를 이용하여 $n=10$을 구하면 10점	30
1-3	1. 표준화하여 확률 $\mathrm{P}(X \leq 4)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{4-m}{\frac{2}{2m+1}}\right)$을 구하면 5점 2. 관계식 $\frac{1}{2}(2m+1)(4-m)=-m^2+\frac{7}{2}m+2=2$를 구하면 5점 2. $m^2-\frac{7}{2}m=m\left(m-\frac{7}{2}\right)=0$으로부터 양수 $m=\frac{7}{2}$를 구하면 10점	20

7. 예시 답안

[1-1]

주어진 조건은 $x_1+x_2+x_3+x_4=9$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$, $x_4 \geq 0$를 만족한다. 여기에서 x_1은 m_1월 이전에 달 수, x_2는 m_1월과 m_2월 사이의 달 수, x_3는 m_2월과 m_3월 사이의 달수, 그리고 x_4는 m_3이후의 남은 달 수이다. 따라서 $y_2=x_2-2 \geq 0$, $y_3=x_3-2 \geq 0$이라 하면

$$x_1+y_2+y_3+x_4=5,\ x_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

을 만족하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_5 = {}_{4+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}=56$$

이다.

[1-2]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)=np$이고 $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$이다. 조건 (a)로부터 $np=4np(1-p)$이므로 $p=\dfrac{3}{4}=\dfrac{k}{8}$이고 조건 (b)로부터 $\mathrm{P}(X=1)=30\mathrm{P}(X=0)$이므로 ${}_n\mathrm{C}_1\, p^1(1-p)^{n-1}=30\, {}_n\mathrm{C}_0\,(1-p)^n$ 으로부터 $np=30(1-p)$이다. 따라서 $k=6$이고 $n=10$이다.

[1-3]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{4}{(2m+1)^2}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X \leq 4)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{4-m}{\dfrac{2}{2m+1}}\right)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{1}{2}(2m+1)(4-m)\right)$이다.

표준정규분포표로부터 $\mathrm{P}(Z \leq 2)=0.9772$이므로 $\dfrac{1}{2}(2m+1)(4-m)=2$이다. 따라서 $m=\dfrac{7}{2}$이다.

[경북대학교 문항정보: 논술]

[문항카드 12]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열 II 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	선분의 내분점과 외분점, 공간벡터의 내적, 직선의 방정식, 함수의 극한, 함수의 몫의 미분법
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를

(1) $m : n\ (m > 0,\ n > 0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) $m : n\ (m > 0,\ n > 0,\ m \neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

(나) 두 점 $\mathrm{A}\,(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}\,(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

이다. (단, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$이다.)

(다) 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$일 때, 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$ 이다.

좌표공간에 네 점 $\mathrm{A}(1,2,4)$, $\mathrm{B}(4,1,9)$, $\mathrm{C}(-3,5,-7)$, $\mathrm{D}(a,b,c)$가 있다. 두 직선 AB와 CD가 서로 수직이고 점 D는 직선 AB 위에 있다. 선분 AB를 $m:1$로 내분하는 점을 P, $m^2:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. (단, a, b, c는 실수이고 $m > 2$이다.)

【2-1】 $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (10점)

【2-2】 $m=3$ 일 때, 점 P 와 Q 의 좌표를 구하시오. (10점)

【2-3】 선분 PQ 의 중점을 M 이라 할 때, 다음은 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ 의 크기의 최솟값을 구하는 과정이다.

> 주어진 조건으로부터 점 M 은 선분 DB 를 $1:\boxed{①}$ 로 내분하는 점이다. 그런데 세 점 B, D, M 은 한 직선 위에 있으므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ 는 서로 평행하다. 그러므로
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{DM}} = \boxed{②}\,\overrightarrow{\mathrm{DB}}$$
>
> 이다. 한편 $|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}|^2$ 이고
>
> ⋮
>
> (중략)
>
> ⋮
>
> 따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ 의 크기의 최솟값은 $\boxed{③}$ 이다.

①, ②, ③ 에 들어갈 m 에 대한 식 또는 수를 각각 $f(m)$, $g(m)$, α 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\lim\limits_{m\to\infty} mf(m)$을 구하시오. (20점)

(2) $g(m)$이 최소가 되는 m 의 값을 구하시오. (30점)

(3) $\alpha^2 = \dfrac{p+q\sqrt{3}}{16}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) (20점)

3. 출제 의도

자연과학, 공학 등에서 공간도형 및 공간벡터를 이해하는 것은 매우 중요하다. 본 문제에서는 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점, 직선의 방정식, 공간벡터의 연산과 내적을 학생들이 이해하고 있는지를 평가하였다. 또한 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가하였고, 미분법을 활용하여 함수의 최솟값을 계산할 수 있는지를 평가하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 2. 공간좌표 - 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
2-1	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
2-2	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 2. 공간좌표 - 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
2-3(1)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 2. 공간좌표 - 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. [미적분 I] II. 함수의 극한과 연속, 1. 함수의 극한 - 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. 미적1212. 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
2-3(2)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [미적분 II] III. 미분법, 1. 여러 가지 함수의 미분법, 2. 도함수의 활용 - 함수의 몫을 미분할 수 있다. - 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다. 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
2-3(3)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	정상권 외 7명	㈜ 금성출판사	2018	150-152 164-170 172-175
	기하와 벡터	김창동 외 14명	㈜ 교학사	2016	150-153 161-181
	미적분 I	황선욱 외 10명	좋은책 신사고	2016	60-63
	미적분 I	김창동 외 14명	㈜ 교학사	2018	59-66
	미적분 II	정상권 외 7명	㈜ 금성출판사	2018	110-113 132-137
	미적분 II	김창동 외 14명	㈜ 교학사	2016	111-115 133-142

5. 문항 해설

[2-1] 좌표공간에서 직선의 방정식과 두 직선의 수직 조건을 이해하는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-2] 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점을 이해하고 계산할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-3] (1) 좌표공간에서 선분의 내분점이 주어졌을 때 내분 비율을 계산할 수 있는지를 평가하고 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-3] (2) 두 공간벡터의 평행 조건을 이해하였는지를 평가한다. 또한 미분을 활용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-3] (3) 공간벡터의 내적에 대한 성질을 이용하여 공간벡터의 크기를 계산할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$a=-5$를 구한 경우	3점
	$b=4$를 구한 경우	3점
	$c=-6$을 구한 경우	3점
	$a+b+c=-7$을 구한 경우	1점
2-2	$\mathrm{P}\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{31}{4}\right)$을 구한 경우	5점
	$\mathrm{Q}\left(\frac{35}{8}, \frac{7}{8}, \frac{77}{8}\right)$을 구한 경우	5점
2-3 (1)	$f(m)=\dfrac{m-2}{6m^2-m-4}$ 또는 $f(m)$에 대한 관계식을 구한 경우	10점
	$\lim_{m\to\infty} mf(m)=\dfrac{1}{6}$을 구한 경우	10점
2-3 (2)	$g(m)=\dfrac{6m^2-m-4}{6m^2-6}$ 또는 $g(m)$에 대한 관계식을 구한 경우	10점
	$m=2+\sqrt{3}$을 구한 경우	20점
2-3 (3)	$p=3701$을 구한 경우	9점
	$q=700$을 구한 경우	9점
	$p+q=4401$을 구한 경우	2점

7. 예시 답안

【2-1】 (10점)

○ 주어진 조건으로부터 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{5}$$

이므로 D의 좌표는 $(a, b, c)=(3t+1, -t+2, 5t+4)$와 같이 표현할 수 있다. 직선 CD의 방향벡터는 $(3t+4, -t-3, 5t+11)$이고 두 직선 AB와 CD가 서로 수직이므로

$$(3t+4, -t-3, 5t+11)\cdot(3, -1, 5)=0$$

이다. 그러므로 $t=-2$이고 $(a, b, c)=(-5, 4, -6)$이다. 따라서 $a+b+c=-7$이다.

【2-2】 (10점)

○ 주어진 조건으로부터

$$\mathrm{P}\left(\frac{4m+1}{m+1},\ \frac{m+2}{m+1},\ \frac{9m+4}{m+1}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{4m^2-1}{m^2-1},\ \frac{m^2-2}{m^2-1},\ \frac{9m^2-4}{m^2-1}\right)$$

이다. 따라서 $m=3$ 일 때, $\mathrm{P}\left(\frac{13}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{31}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{35}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{77}{8}\right)$ 이다.

【2-3】 (20+30+20=70점)

(1) (20점) ○ 선분 PQ 의 중점 M 의 좌표는 $\mathrm{M}\left(4+\frac{-3m+6}{2m^2-2},\ 1+\frac{m-2}{2m^2-2},\ 9+\frac{-5m+10}{2m^2-2}\right)$ 이고 【2-1】의 풀이로부터 $\mathrm{D}(-5,\ 4,\ -6)$ 이다. M 은 선분 DB 를 $1:f(m)$ 으로 내분하는 점이므로

$$\frac{4-5f(m)}{1+f(m)}=4+\frac{-3m+6}{2m^2-2}$$

이다. 그러므로 $f(m)=\frac{m-2}{6m^2-m-4}$ 이다. 따라서 $\lim_{m\to\infty} mf(m)=\frac{1}{6}$ 이다.

(2) (30점) ○ 세 점 $\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{M}$ 은 한 직선 위에 있으므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ 는 서로 평행하다. (1) 로부터

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\frac{1}{1+f(m)}\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\frac{6m^2-m-4}{6m^2-6}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$$

이므로 $g(m)=\frac{6m^2-m-4}{6m^2-6}$ 이다. $g(m)$ 의 도함수의 부호를 조사하면 함수 $g(m)$ 은 $m=2+\sqrt{3}$ 일 때 최소가 됨을 알 수 있다.

(3) (20점) ○ 조건으로부터 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\sqrt{6}$ 이고 $|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=3\sqrt{35}$ 이다. $\overrightarrow{\mathrm{DM}}=g(m)\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ 은 서로 수직이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2+\{g(m)\}^2|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2\\&=6+315\{g(m)\}^2\end{aligned}$$

이다. $g(m)$ 의 최솟값은 $g(2+\sqrt{3})=\frac{10+\sqrt{3}}{12}$ 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2$ 의 최솟값은

$$\alpha^2=\frac{3701+700\sqrt{3}}{16}$$

이다. 따라서 $p=3701,\ q=700$ 이고 $p+q=4401$ 이다.

[문항카드 13]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열2 / 수학 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II
	핵심 개념 및 용어	함수의 극대와 극소, 부정적분, 부분적분, 적분과 넓이, 접선의 방정식, 삼각함수 덧셈 정리
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad (\text{단, } f'(y) \neq 0)$$

이다.

(다) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[문항]

함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^x$ 에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$ 에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f(t)-f^{-1}(t)\}dt$$

는 $x=1$ 에서 극솟값 $-\dfrac{1}{3}$ 을 갖는다. (단, a, b 는 양수이고, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

【3-1】 $\dfrac{b}{a}$ 의 값을 구하시오. (30점)

【3-2】 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$ 에서의 접선을 l_2 라 하자. 직선 l_1 과 직선 l_2 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하시오. (20점)

【3-3】 $f(\alpha)-g(\alpha)=4$를 만족시키는 양의 실수 α 에 대하여 $2\alpha e^{\alpha-1}+3\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx$ 의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

본 문제는 함수와 역함수의 부정적분에 대한 성질과 미적분의 기본정리 및 적분을 이용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다. 또 함수와 역함수의 미분에 대한 관계를 이용하여 두 접선이 이루는 각에 대한 탄젠트 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[3-1] 주어진 함수의 부정적분에 미적분의 기본정리와 미분을 적용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[3-2] 미분을 이용하여 함수의 접선의 기울기와 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 접선의 기울기를 구한 후, 두 접선이 이루는 각에 대한 탄젠트 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[3-3] 함수와 역함수의 부정적분에 대한 조건으로부터 주어진 적분값을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2412. 부분적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 ③ 역함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 미적2313. 역함수를 미분할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항3-1	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] - 다. 다항함수의 미분법 ②도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 ②정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2413-3. 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다 [미적분 II] - 다. 미분법 ②도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다 [미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2412. 부분적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다 [미적분 II] - 라. 적분법 ②정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다
문항3-2	교육과정	[미적분 II] - 다. 미분법 ②도함수의 활용 ① 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 ③ 역함수를 미분할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 다. 미분법 ②도함수의 활용 미적2321. 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 미적2313. 역함수를 미분할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항3-3	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2413-3. 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2018	75−78, 113−120, 145−152, 157−159
	미적분 II	우정호 외	동아출판	2018	96−99, 150−159, 211−213, 220−223

5. 문항 해설

【3-1】 조건으로부터 $f(1)=1$ 을 구하고, 함수 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 성질을 이용하여 $\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 구한 후, 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$ 을 구한다.

【3-2】 미분계수를 이용하여 함수의 그래프의 위의 점에서 접선의 기울기를 구하고, 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 그래프의 위의 점에서 접선의 기울기를 구한 후, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각에 대한 탄젠트 값을 구한다.

【3-3】 함수의 증가와 감소를 이용하여 $f(\alpha)-g(\alpha)=4$로부터 $\alpha>1$ 을 추론하고, 문제의 조건으로부터 $\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)dx$ 와 $g(\alpha)$ 의 관계를 찾아 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$f(1)=1$ 또는 $(a+b)e=1$ 을 구한다.	5
	$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$ 을 구한다.	10
	관계식 $ae+b-2a=\frac{1}{3}$ 을 구한다.	10
	$a=\frac{1}{3e}$, $b=\frac{2}{3e}$ 또는 $\frac{b}{a}=2$ 를 구한다.	5
3-2	접선 l_1의 기울기를 구한다.	5
	직선 l_2의 기울기를 구한다.	5
	$\tan\theta$의 값을 구한다.	10

3-3	$\int_{1}^{\alpha} f^{-1}(x)dx$과 $g(\alpha)$의 관계를 구한다.	15
	정답 10을 구한다.	15

7. 예시 답안

【3-1】

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$$g'(1)=f(1)-f^{-1}(1)=0 \quad 즉,\ f(1)=1$$

이다. 그러므로

$$(a+b)e=1$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$이고이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여

$$\int_{0}^{1}\{f(x)+f^{-1}(x)\}dx=1$$

이다. 또 조건으로부터 $g(1)=-\frac{1}{3}$이므로

$$g(1)=\int_{0}^{1}\{f(x)-f^{-1}(x)\}dx=-\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{3}$이다. 한편 부분적분법을 이용하면

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax^2+bx)e^x dx=ae+b-2a$$

이므로

$$ae+b-2a=\frac{1}{3}$$

이다. 그러므로 $a=\frac{1}{3e}$, $b=\frac{2}{3e}$ 이다. 따라서 $\frac{b}{a}=2$이다.

【3-2】

함수 $f(x)=\frac{1}{3e}(x^2+2x)e^x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선 l_1의 기울기는 $f'(1)=\frac{7}{3}$이다. 또 역함수의 미분법에 의하여 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$에서의 접선 l_2의 기울기는 $\frac{3}{7}$이다. 직선 l_1의 기울기를 $\tan\theta_1$, 직선 l_2의 기울기를 $\tan\theta_2$라 하면 $\tan\theta_1=\frac{7}{3}$, $\tan\theta_2=\frac{3}{7}$이고 $\theta=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{20}{21}$$

이다.

【3-3】

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 증가함수이고 $h(1)=\dfrac{4}{3}$ 이므로 $f(\alpha)-g(\alpha)=4$ 인 α 는 $\alpha>1$ 이다.

한편 문제의 조건으로부터

$$4=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\alpha)-g(1)-\int_1^{\alpha} f(x)dx+\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)dx$$

이므로

$$\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)dx=\frac{10}{3}-f(\alpha)+\frac{1}{3e}\alpha^2 e^{\alpha}$$

이다. 그러므로

$$2\alpha e^{\alpha-1}+3\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)dx=10$$

이다.

[문항카드 14]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열2 / 수학 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	이차곡선, 포물선, 쌍곡선, 초점, 삼각함수
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 초점이 $\mathrm{F}(0,p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

이다.

(나) 두 초점 $\mathrm{F}(0,c)$, $\mathrm{F}'(0,-c)$로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

이고 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

이다.

(다) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$에 대하여 선분 AB의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다.

[문항]

포물선

$$C_1 : x^2 = ay - 3$$

에 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(0, c)$와 $\mathrm{F}'(0, -c)$인 쌍곡선

$$C_2 : \frac{x^2}{3} - y^2 = -1$$

의 점근선이 접할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, c는 양수이다.)

【4-1】 $a^2 + c^2$의 값을 구하시오. (15점)

【4-2】 포물선 C_1 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 $\mathrm{F'P}$와 쌍곡선 C_2의 교점 중 제1사분면 위의 점을 Q라 하자.

(1) 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자. 두 등식

$$\left|\overline{\mathrm{FP}} + \boxed{\ ①\ }\right| = \boxed{\ ②\ }\,\overline{\mathrm{FR}}$$

$$\overline{\mathrm{F'S}} + \boxed{\ ③\ }\,\overline{\mathrm{FQ}} = \boxed{\ ④\ }$$

가 항상 성립하도록 하는 ①, ②, ③, ④에 알맞은 수를 각각 p, q, r, s라 할 때, $p \times q \times r \times s$의 값을 구하시오. (25점)

(2) 직선 $\mathrm{F'P}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 선분 FQ의 길이는

$$\overline{\mathrm{FQ}} = \alpha + \frac{3}{2\sin\theta + \beta}$$

이다. 상수 α, β의 값을 구하시오. (30점)

(3) 직선 $\mathrm{F'P}$와 쌍곡선 C_2의 교점 중 제4사분면 위의 점을 Q'이라 하자. 선분 FQ의 길이가 최대가 될 때,

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ'}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \frac{n}{m} + \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

이다. 서로소인 자연수 m, n의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

본 문제는 이차곡선의 기하적 특징들을 평면좌표계를 활용하여 알아낼 수 있는지 평가 하고자 한다. 문제의 조건으로부터 포물선과 쌍곡선의 위치관계를 파악하고 포물선과 쌍곡선의 기하적 정의로부터 선분들 사이의 관계식을 유도할 수 있는지 평가한다. 그리고, 선분의 길이를 각에 대한 함수로 표현하여 그것이 최대가 될 조건을 찾을 수 있는지 평가한다.

[4-1] 제시문과 문제의 조건을 활용하여 포물선의 방정식을 구하고 쌍곡선의 초점을 찾을 수 있는지 평가한다.

[4-2] 포물선과 쌍곡선의 정의를 활용하여 곡선의 교점들이 이루는 선분 사이의 관계식을 유도할 수 있는지 평가한다. 이를 활용하여 선분의 길이를 각에 대한 함수로 표현하고 선분의 길이가 최대가 될 조건을 파악할 수 있는지 평가한다. 이로부터 포물선과 쌍곡선 위의 점으로 이루어진 선분의 비율을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 나. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1111. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 나. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
문항4-1	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1111. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
문항4-2	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. [수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분II] 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1111. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. [수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분II] 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	11-30
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2018	15-45
	미적분 II	김창동 외	교학사	2016	60-74
	미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	57-67

5. 문항 해설

【4-1】 문제의 조건으로부터 포물선의 방정식과 쌍곡선의 초점을 찾을 수 있는지 평가하는 문항이다.

【4-2】 이차곡선의 정의와 피타고라스 정리로부터 이차 곡선과 직선의 교점으로 이루어진 선분들 사이의 관계식을 유도할 수 있는지 평가하는 문항이다. 이로부터 특정 선분의 길이를 각에 관한 함수로 표현하고 최대가 될 때의 선분 사이의 비율을 찾을 수 있는지 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	a의 값을 구한다.	5
	c의 값을 구한다.	5
	a^2+c^2의 값을 구한다.	5
4-2	(1) p의 값을 구한다.	5

	(1) q의 값을 구한다.	5
	(1) r의 값을 구한다.	5
	(1) s의 값을 구한다.	5
	(1) $p\times q\times r\times s$ 의 값을 구한다.	5
	(2) α의 값을 구한다.	15
	(2) β의 값을 구한다.	15
	(3) m의 값을 구한다.	15
	(3) n의 값을 구한다.	15

7. 예시 답안

【4-1】

조건으로부터 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(0,2)$, $(0,-2)$이다. 즉, $c=2$이다. 그리고, 점근선 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이 포물선에 접하므로 y에 대한 이차 방정식 $(\pm\sqrt{3}y)^2-ay+3=0$은 중근을 갖는다. 그러므로 $a=6$이다. 따라서, $a^2+c^2=40$이다.

【4-2】(1)

포물선 C_2의 초점은 $\mathrm{F}(0,2)$이고 준선의 방정식은 $y=-1$이므로 선분 $\overline{\mathrm{FP}}$의 길이는 점 P에서 직선 $y=-1$ 까지의 거리와 같다. 그런데, 점 $\mathrm{F}(0,2)$에서 $(0,-1)$ 까지의 거리는 3이므로,

$$\overline{\mathrm{FP}}-3=\pm\overline{\mathrm{FR}}$$

쌍곡선의 정의로 부터 $\overline{\mathrm{F'Q}}=2+\overline{\mathrm{FQ}}$이고 직각삼각형 $\triangle\mathrm{FSQ}$와 $\triangle\mathrm{F'SQ}$에 피타고라스 정리를 적용하면,

$$\overline{\mathrm{F'S}}-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{5}{2}$$

이다. 따라서, $p\times q\times r\times s=\dfrac{15}{4}$이다.

【4-2】(2)

$\angle\mathrm{SQF'}=\theta$이고 (1)의 두 번째 등식으로부터, $\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{F'S}}}{\overline{\mathrm{F'Q}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FQ}}+5}{2\overline{\mathrm{FQ}}+4}$이므로,

$$\overline{\mathrm{FQ}}=-2+\frac{3}{2\sin\theta-1}$$

이다. 따라서, $\alpha=-2$, $\beta=-1$이다.

【4-2】(3)

(2)의 식으로부터 θ가 최소가 될 때, 즉, 직선 $\mathrm{F}'\mathrm{P}$가 포물선에 접할 때 $\overline{\mathrm{FQ}}$가 최대가 된다. 접점의 좌표를 $\mathrm{P}\left(\mathrm{t}_0, \frac{\mathrm{t}_0^2+3}{6}\right)$이라 하면, 접선의 방정식은 $y-\frac{t_0^2+3}{6}=\frac{t_0}{3}(x-t_0)$이다. 접선이 점 $\mathrm{F}'(0,-2)$를 지나므로 접선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{15}}{3}x-2$이다. 접선과 쌍곡선의 교점 Q, Q'의 y좌표를 각각 구하면 $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{10}}{2}$이다. 점 Q'에서 y축에 내린 수선을 발을 S'이라 할 때,

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}'}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{\overline{\mathrm{RS}'}}{\overline{\mathrm{RS}}}=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

이다. 따라서, $m=3$, $n=7$ 이다.