2018학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사
자연계열 I 모범답안 및 채점기준

[문제 1]

출제의도

1. 순열과 조합의 뜻을 알고 그 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.
2. 확률의 의미와 그 기본 성질 (덧셈정리, 여사건 그리고 독립)을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
3. 이항분포를 포함한 이산확률분포의 기본 성질과 이산확률변수의 기댓값과 분산을 구할 수 있는지 평가한다.
4. 자연수의 계승을 계산할 수 있고, 조건을 만족하는 집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있는지를 평가한다.
5. 조합의 수가 갖는 배수로서의 성질을 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

문항해설

1. 1번 (1) 문항은 순열과 조합을 이용하여 사건의 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 확률을 구할 수 있는 지 그리고 여사건의 성질을 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다. 1번 (2) 문항은 확률의 기본성질인 덧셈정리, 여사건 그리고 독립의 성질을 이해하고 이를 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.
2. 2번 문항은 이항분포를 따르는 이산확률변수 X의 확률분포표에 대한 성질을 이해하고 이를 이용하여 이산확률변수 X의 기댓값과 분산을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.
3. 3번 문항은 자연수의 계승을 계산을 할 수 있는지를 묻고, 주어진 조건에 따라 집합을 구할 수 있는지와 조합의 수의 배수로서의 성질을 파악할 수 있는지를 묻는 문항이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
1	1. 순열과 조합을 이용하여 사건의 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 확률을 구하였는가? 그리고 이를 위해 여사건의 성질을 이용하였는가? 2. 확률의 기본성질인 덧셈정리, 여사건 그리고 독립의 성질을 이용하여 확률을 구하였는가?	30
2	1. 이항분포를 이용하여 각 확률을 구하였는가? 그리고 이를 이용하여 조건을 만족하는 p의 범위를 구하였는가? 2. 이항분포의 분산을 이용하여 분산이 최대가 되는 p의 값을 구하고 그 때의 기댓값과 분산을 구하였는가?	30
3	1. 순열의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 집합을 구하였는가? 2. 조합의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 자연수의 개수와 그 집합을 구하였는가?	40

예시답안

[물음 1]

(1) 먼저 각 주머니에서 꺼낸 공의 색깔이 모두 다른 경우의 사건을 A라고 하면 꺼낸 4개의 공 중에서 같은 색깔의 공이 있는 사건은 사건 A에 대한 여사건 A^c으로 그 확률은 $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$으로 구해진다. 각 주머니에서 2개의 공을 꺼내는 전체 경우의 수는 ${}_7C_2 \times {}_7C_2 = \frac{7\times 6}{2\times 1}\times\frac{7\times 6}{2\times 1}=441$이고 각 주머니에서 꺼낸 공의 색

이 모두 다른 경우의 수는 ${}_7C_2 \times {}_5C_2 = \frac{7\times6}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=210$이다. 따라서

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_7C_2\times{}_5C_2}{{}_7C_2\times{}_7C_2}=\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{10}{21}$이고 $\underline{\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{10}{21}=\frac{11}{21}}$이다.

(2) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이고 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$이다.

두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\mathrm{P}(B)$이다. 따라서 $\underline{\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}}$이다.

[물음 2]

(1) 확률변수 X는 $B(3,p)$인 이항분포를 따르므로 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3	1

따라서 $(b+c)-(a+d)\geq\frac{1}{8}$은 $(3p(1-p))-(1-3p(1-p))\geq\frac{1}{8}$이고

$p^2-p+\frac{3}{16}=\left(p-\frac{1}{4}\right)\left(p-\frac{3}{4}\right)\leq 0$이므로 $\underline{\frac{1}{4}\leq p\leq\frac{3}{4}}$이다.

(2) 확률변수 X가 $B(3,p)$인 이항분포이므로 분산은 $V(X)=3p(1-p)$로 $\underline{p=\frac{1}{2}}$에서 최대가 된다. 따라서 이때의

$\underline{E(X)=3p=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$이고 $\underline{V(X)=3p(1-p)=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}}$이다.

[물음 3]

(1) n이 제곱수이면 $n=a^2$에 대해 $a>2$이면
$(n-1)!=1\times2\times\cdots\times a\times\cdots\times 2a\times\cdots\times(n-1)$이므로 n으로 나누어떨어진다. 단, $n=4$이면
$(4-1)!=6$이므로 4로 나누어떨어지지 않는다. n이 소수이면 1과 n이외에는 약수가 없으므로
$(n-1)!$은 n으로 나누어떨어지지 않는다. 단, n이 제곱수가 아닌 합성수이면 $n=n_1\times n_2$
(단, $1<n_1<n_2<n$)인 약수 n_1과 n_2를 가지므로
$(n-1)!=1\times2\times\cdots\times n_1\times\cdots\times n_2\times\cdots\times(n-1)$
은 n으로 나누어떨어진다. 따라서 [조건 1]과 [조건 2]를 만족하는 집합은 $\underline{A=\{2,3,4,5,7\}}$이다.

(2) 2이상의 소수 n의 경우에는 ${}_n\mathrm{C}_\mathrm{k}\,(1\leq \mathrm{k}\leq \mathrm{n}-1)$이 n의 배수가 되는 k의 개수가
$n-1$이고, $n=4$인 경우에는 ${}_4\mathrm{C}_k\,(1\leq k\leq 3)$이 4의 배수가 되는 k의 개수는 2이다.
따라서 $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=2$, $x_5=4$, $x_7=6$이므로 집합 $\underline{B=\{1,2,4,6\}}$이고
모든 원소의 합은 $\underline{13}$이다.

[문제 2]

출제의도

1. 등차수열의 뜻을 알고, 그 수열의 일반항과 합을 구할 수 있는지를 평가한다.
2. 지수함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 평가한다.
3. 함수의 그래프의 개형을 그리고 방정식과 부등식에 활용할 수 있는지를 평가한다.

문항해설

【2-1】 (가)에 제시된 내용을 바탕으로 등차수열의 일반항과 등차수열의 합을 구하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

【2-2】 (나), (다)를 이용하여 지수함수의 그래프를 그리고, 두 그래프가 만나기 위한 조건을 방정식 또는 부등식으로 나타낸 후 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
【2-1】(1)	- a_k과 S_k를 이용하여 관계식으로 나타낸다. - k의 값을 구한다.	10점 5점
【2-1】(2)	- 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구한다. - a_5의 값을 구한다.	5점 10점
【2-1】(3)	- a_n과 S_n의 일반식을 구하고 a_n+S_n을 식으로 나타낸다 - a_n+S_n이 최대가 되는 n과 그 값을 구한다.	10점 10점
【2-2】(1)	- 두 함수의 그래프가 만나기 위한 조건을 α에 대한 식으로 나타낸다. - k의 값을 구한다.	10점 10점
【2-2】(2)	- 두 함수의 그래프가 두 점에서 만나기 위한 모든 조건을 나타내고 식으로 표현한다. - k_0의 값을 구한다.	20점 10점

예시답안

【2-1】

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 $a_1=35$이므로 (가)에 의하여

$$8=a_k=a_1+(k-1)d=35+(k-1)d$$

$$215=S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(35+a_k)}{2}=\frac{43k}{2}$$

이다. 따라서 $k=10$ 이고 $d=-3$ 이다. 그러므로 $a_n=38-3n$, $S_n=\dfrac{n(73-3n)}{2}$ 이다.

(1) $k=10$

(2) $a_5=38-3\times 5=23$이다.

(3) $f(n) = a_n + S_n$이라 하면

$$f(n) = -\frac{1}{2}(3n^2 - 67n) + 38$$

이다. n은 자연수이므로 $f(n)$은 $n = 11$일 때, $f(11) = 225$를 갖는다.

【2-2】

(1) $\alpha = \log_2 3$이면 $2^\alpha = 3$ 이므로 $f(\alpha) = g(\alpha)$로부터 $k = \frac{17}{3}$이다.

(2) 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 함수

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4^x + 8 - k \cdot 2^x$$

의 그래프가 x축과 두 점에서 만나는 경우이다. 함수 $h(x)$를 미분하면

$$h'(x) = 2^x \ln 2\,(2^{x+1} - k)$$

이다.

(i) $k \le 0$인 경우: 모든 x에 대하여 $h'(x) > 0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 증가하므로 x축과 두 점에서 만날 수 없다.

(ii) $k > 0$인 경우: $h'(x) = 0$로부터 $x = \log_2 \frac{k}{2}$일 때 $h(x)$는 최솟값 $8 - \frac{k^2}{4}$를 갖는다. 도함수 $h'(x)$의 부호를 이용하여 함수의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	감소	$8 - \frac{k^2}{4}$	증가

또한 $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 8$이므로 $h(\log_2 \frac{k}{2}) < 0$ 이면 함수 $h(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 그러므로 $8 - \frac{k^2}{4} < 0$, 즉 $k > 4\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $k_0 = 4\sqrt{2}$ 이다.

[별해] 함수 $h(x) = 2^x + 8 \cdot 2^{-x}$라 할 때, $h(x) = k$가 서로 다른 두 실근을 갖는 k의 값과 같다. $h'(x) = 2^{-x} \ln 2\,(4^x - 8)$이므로 $h(x)$는 $x = \frac{3}{2}$일 때 최솟값 $h(\frac{3}{2}) = 4\sqrt{2}$ 를 갖는다. 또 $h(x)$는 $x < \frac{3}{2}$이면 감소하고 $x > \frac{3}{2}$이면 증가하고, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$이다. 따라서 $h(x) = k$는 $k < 4\sqrt{2}$이면 해가 없고, $k = 4\sqrt{2}$이면 한 개의 실근을 갖고, $k > 4\sqrt{2}$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

[별해] 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 방정식

$$f(x) - g(x) = 4^x + 8 - k \cdot 2^x = 0$$

가 서로 다른 두 실근을 갖는 경우이다. $t = 2^x$라 하면 $t > 0$이고 t는 x가 증가하면 증가하므로 $t^2 - kt + 8 = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는 경우와 같다. 그러므로 $D = k^2 - 32 > 0$ 이고 $\frac{k}{2} > 0$이다. 따라서 $k > 4\sqrt{2}$ 이다.

[문제 3]

출제 의도

1. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 연산을 할 수 있는지를 평가한다.
2. 평면좌표에서 두 점 사이의 거리, 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.
3. 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다.
4. 도함수를 활용하여 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

문항 해설

[3-1] (1) 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 연산을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3-1] (2) 공간벡터의 연산을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3-2] (1) 번 문항은 접선의 방정식을 구하고, 접점과 직선사이의 거리를 구할 수 있는지 묻는 문항이다.

[3-2] (2) 번 문항은 매개변수를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하고, 도함수를 활용하여 최솟값을 찾을 수 있는지 묻는 문항이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
3-1 1)	α와 β를 구하면 20점	20점
3-1 (2)	α, β, γ를 구하면 25점 합을 구하면 5점.	30점
3-2 (1)	접선의 방정식을 이용하여 접점을 구하면 15점 접점과 직선 사이의 거리를 구하면 5점.	20점
3-2 (2)	매개변수를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하면 10점 미분을 이용하여 최솟값을 구하면 20점.	30점

예시 답안

[3-1]

$\vec{a} = 2\vec{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{EH}} = 2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}} = 2\vec{e_3}$

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(1)

$$\vec{b} = \frac{2}{3}(2\vec{e_1} + \vec{e_2}), \quad \vec{c} = 2(\vec{e_2} + \frac{2}{3}\vec{e_3})$$

따라서,

$$2\vec{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{EH}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 2\alpha\vec{e_1} + 2\beta(\frac{2}{3}\vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_2})$$

이고

$$\overrightarrow{e_2}=(\alpha+\frac{2}{3}\beta)\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{3}\beta\overrightarrow{e_2}$$

이다. 따라서, $\beta=3$이고 $\alpha+\frac{2}{3}\beta=0$이여야 한다.

두식을 연립하여 풀면, $\alpha=-2$이고, $\alpha+\beta=1$이다.

(2) 같은 방법으로

$$\overrightarrow{e_3}=(\alpha+\frac{2}{3}\beta)\overrightarrow{e_1}+(\frac{1}{3}\beta+\gamma)\overrightarrow{e_2}+\frac{2}{3}\gamma\overrightarrow{e_3}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$\alpha+\frac{2}{3}\beta=0,\quad \frac{1}{3}\beta+\gamma=0,\quad \frac{2}{3}\gamma=1$$

이여야 한다. 세 식을 연립하여 풀면,

$$\alpha=3,\quad \beta=-\frac{9}{2},\quad \gamma=\frac{3}{2}$$

이므로,

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

이다.

[3-2]

(1) 포물선과 직선의 거리의 최솟값은 기울기가 4인 포물선의 접선과 직선의 거리가 된다.

즉, $y'=4$ 이므로 접점은 $(\frac{1}{32},\frac{1}{4})$이 되고,

제시문 (라)에 의하여 거리는 $\frac{31\sqrt{17}}{136}$ 이 된다.

(2) 구하는 두 점 사이의 거리의 제곱은 $f(y)=(x+\frac{1}{2})^2+(y-2)^2=(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2})^2+(y-2)^2$

이고 양변을 미분하면, $f'(y)=y^3+3y-4=(y-1)(y^2+y+4)$ 이므로

$y=1$에서 최솟값 $\overline{PQ}=\sqrt{2}$ 을 갖는다.

[문제 4]

출제 의도

1. 함수의 미분 가능성의 뜻을 알고 이를 이용하여 미정 계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.
2. 함수의 도함수를 구하여 조건을 만족시키는 실수를 구할 수 있는지를 평가한다.
3. 정적분의 성질과 치환적분법을 활용하여 준 함수의 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.

문항해설

1. (1) 번 문항은 미분의 정의를 알고 다항함수의 도함수를 구하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.
2. (2) 번 문항은 다항 함수의 도함수를 구하여 조건에 알맞은 수를 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.
3. (3) 번 문항은 치환 적분법을 활용하여 정적분 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
(1)	-제시문 (가)의 미분 가능 조건으로부터 연립방정식을 찾아내면 각 5점 -a와 b의 값을 구하면 15점 -a^2+b^2의 값을 찾으면 5점	30점
(2)	-구간 $[0,2]$에서 조건을 만족시키는 실수 c가 존재하지 않음을 기술 하면 10점 -구간 $[2,4]$에서 조건을 만족시키는 실수 c를 찾으면 20점	30점
(3)	-c값을 기준으로 제시문 (나)를 이용하여 적분구간을 나누면 10점 -각 구간에서 적분값을 구하면 각각 10점 -$p+q$의 값을 구하면 10점	40점

예시답안

(1) 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분 가능하므로,

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2=\frac{1}{2}\cdot(2-b)^3+\frac{3}{2}\cdot(2-b)^2 \\ -\frac{3a}{2}\cdot 2^2+\frac{6}{2}\cdot 2=\frac{3}{2}\cdot(2-b)^2+\frac{6}{2}\cdot(2-b) \end{cases}$$

이 방정식을 풀면, $a=1, b=4$. 따라서, $a^2+b^2=17$

(2) 구간 $[0,2]$에서 방정식 $f(x)+f'(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x^2+3x=0$

을 풀면, $x=0, \pm\sqrt{6}$. 따라서, 해당되는 x의 값은 존재하지 않는다. 한편, 구간 $[2,4]$에서 방정식

$f(x)+f'(x)=\frac{1}{2}(x-4)^3+\frac{3}{2}(x-4)^2+\frac{3}{2}(x-4)^2+3(x-4)=0$

을 풀면, $x=1\pm\sqrt{3}, 4$. 따라서, $c=1+\sqrt{3}$.

(3) $\displaystyle\int_1^3\left|\frac{f'(t)}{f(t)}+1\right|dt=\int_1^3\frac{|f'(t)+f(t)|}{f(t)}dt=\int_1^c\frac{f'(t)+f(t)}{f(t)}dt-\int_c^3\frac{f'(t)+f(t)}{f(t)}dt$

$$\begin{aligned} &=[\ln(f(t))+t]_1^c-[\ln(f(t))+t]_c^3 \\ &=2\{(\ln(f(c))+c\}-4 \\ &=2\{\ln(-9+6\sqrt{3})-1+\sqrt{3}\} \end{aligned}$$

따라서, $p+q=-3$.