2016학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술 자연계열 I 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

시 험 시 간	15:30 ~ 17:10 (100분)		
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인	
수 험 번 호		㊞	
성 명			

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 6쪽(수학 2쪽, 물리, 화학, 생명 과학, 지구 과학 각 1쪽)으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 1매, 선택과목 1매(각 2쪽)으로 구성되어 있음
3. 과학영역(물리, 화학, 생명 과학, 지구 과학)에서 반드시 2개의 과목을 선택하여, 답안지의 해당란에 ● 표기하고 선택한 과목명을 기재하여야 함
4. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, <u>반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것</u>(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
5. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
6. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
7. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
8. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

자연수 n과 실수 $a_{ij}\,(i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,n)$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\\ &= (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})\\ &\quad +\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})\end{aligned}$$

이다. 특히 $a_{ij}=c_id_j$ (c_i, d_j는 실수)인 경우에

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_id_j &= (c_1d_1+c_1d_2+\cdots+c_1d_n)+(c_2d_1+c_2d_2+\cdots+c_2d_n)\\ &\quad +\cdots+(c_nd_1+c_nd_2+\cdots+c_nd_n)\\ &= c_1\sum_{j=1}^{n}d_j+c_2\sum_{j=1}^{n}d_j+\cdots+c_n\sum_{j=1}^{n}d_j\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\right)\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_id_j=(c_1+c_2+\cdots+c_n)(d_1+d_2+\cdots+d_n)$$

이 성립한다.

(나)

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $F'(x)=f(x)$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

가 성립한다.

(다)

$c_i\ge 0\ (i=1,2,\dots,n)$이고 $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$일 때, $\sum_{i=1}^{n}ic_i$의 최댓값은 n이다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

자연수 n과 $\sum_{i=1}^{n}a_i=4$인 실수 $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$에 대하여 함수

$$f(x)=x^3-\frac{5}{4}n^6+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x-a_i)(x-a_j)$$

가

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=1+n^2-n^4$$

을 만족시킨다.

(1) (가)와 (나)를 이용하여 자연수 n의 값을 구하시오. (20점)

(2) 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (15점)

(3) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (15점)

【1-2】

실수 $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{15}$에 대하여 함수

$$g(x)=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}b_i\,x^{i+j}$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $b_i\ge 0\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ 15)$이고 $\sum_{i=1}^{15}b_i=1$일 때, (가)와 (다)를 이용하여 $g'(1)$의 최댓값을 구하시오. (20점)

(2) $b_i=(-1)^i\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ 15)$일 때, 적분 $\int_0^1(1-x^2)g(x)dx$를 이용하여

$$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}$$

의 값을 구하는 과정이다.

> $b_i=(-1)^i$이므로 (가)를 이용하여 $g(x)$를 구하면
>
> $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\boxed{①}}{1-x^2} & (x\ne 1,\ -1)\\[2mm] -15 & (x=1,\ -1)\end{cases}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\int_0^1(1-x^2)g(x)\,dx=\boxed{②}$$
>
> 이다. 한편 $g(x)=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}(-1)^i\,x^{i+j}$이므로
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1(1-x^2)g(x)dx &= \sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}(-1)^i\int_0^1\boxed{③}\,dx\\ &= 2\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}\end{aligned}$$
>
> 이다. 따라서
>
> $$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}=\frac{1}{2}\times\boxed{②}$$
>
> 이다.

위의 과정에서 ①, ②, ③에 들어갈 알맞은 식 또는 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 2)

[2] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

수열 $a_0, a_1, a_2, \dots$이 점화식 $Aa_{n+2}+Ba_{n+1}+Ca_n=0$ (단, $A(\neq 0)$, B, C는 상수, $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$)을 만족할 때, 방정식 $Ax^2+Bx+C=0$을 위 점화식의 보조방정식이라고 한다.
보조방정식의 두 근을 α, β라고 할 때, 수열 일반항 a_n은
$\alpha\neq\beta$이면 $a_n=D\alpha^n+E\beta^n$, $\alpha=\beta$이면 $a_n=(F+Gn)\alpha^n$이다.
(단, D, E, F, G는 상수이다.)

(나)

가위바위보 게임:
가위, 바위, 보 중 하나를 골라서 낸다. 승패 규칙은 보는 바위를 이기고, 바위는 가위를 이기고, 가위는 보를 이긴다. 같은 것을 내면 비긴다.

(다)

(i) 표본공간을 S라 하자. 서로 배반인 사건들 $B_1, B_2, \dots, B_n$이 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$일 때, $B_1, B_2, \dots, B_n$을 S의 분할이라고 한다. 이때, 임의의 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는
$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A\cap B_i)$이다.

(ii) 조건부 확률은 어떤 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 확률을 의미하고, $\mathrm{P}(A|B)$로 나타내며,
$\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【2-1】

(가)를 이용하여 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geq 2)$, $a_0=0$, $a_1=1$을 만족하는 수열의 일반항 a_n이 아래와 같음을 보이시오. (20점)

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

【2-2】

성태는 4만원을 가지고 있으며 세림은 6만원을 가지고 있다. 성태와 세림이가 반복해서 가위바위보 게임을 하며, 각 게임 때마다 이긴 사람이 상대방으로부터 1만원을 얻는다. 세림이와 성태가 가위, 바위, 보를 각각 선택할 확률은 동일하다고 가정하자.

(1) 가위바위보 게임을 한번 할 때, 성태가 세림이를 이길 확률, 비길 확률, 질 확률을 각각 계산하시오. (10점)

(2) 성태 또는 세림이가 10만원을 가지게 되면 모든 게임은 끝난다. 성태가 10만원을 가지게 되어 모든 게임이 종료될 확률이 얼마인지를 알고자 한다.
성태가 n만원을 가지고 있을 때 돈을 모두 잃기 전에 10만원에 도달할 확률을 p_n이라 하자. 그러면, $p_0=0$, $p_{10}=1$임을 알 수 있다.
(나)와 **(다)**를 이용하여, 확률 p_{n-1}, p_n, p_{n+1} $(n=1, 2, \dots, 9)$ 사이의 점화식을 구하면,

①	(10점)

이므로, 이 점화식의 보조방정식의 근은

②	(10점)

이다. 따라서 **(가)**에 의하여, p_n은

③ $p_n=$	(5점)

이다. 성태가 4만원을 가지고 이 게임을 시작하여 돈을 모두 잃기 전에 10만원에 도달하게 될 확률 p_4는

④ $p_4=$	(5점)

이다.
위의 빈칸 ①, ②, ③, ④에 맞는 식이나 값을 구하시오.

【2-3】

어떤 회사의 주식이 아래와 같은 확률로 매일 변한다고 하자.

> ㉠ 오늘의 주가(=주식의 가격)가 20만원일 때, 내일의 주가가 21만원이 될 확률은 0.5이고, 19만원이 될 확률도 0.5이다.
> ㉡ 오늘의 주가가 $x(x>20)$만원일 때, 내일의 주가가 $(x+1)$만원이 될 확률은 $\frac{1}{3}$이고, $(x-1)$만원이 될 확률은 $\frac{2}{3}$이다.
> ㉢ 오늘의 주가가 $y(1\leq y<20)$만원일 때, 내일의 주가가 $(y+1)$만원이 될 확률은 $\frac{2}{3}$이고, $(y-1)$만원이 될 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

나은이는 오늘 이 회사의 주식을 21만원에 구매하였다. 나은이는 주가가 30만원이나 19만원이 되면 팔고자 한다. 주가가 19만원이 되어 팔기 전에 30만원이 되어 팔 확률이 얼마인지를 **(가)**와 **(다)**를 이용하여 구하시오. (40점)

물리

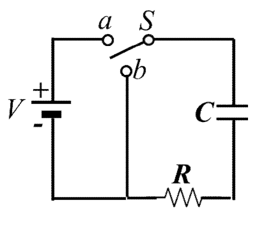
[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

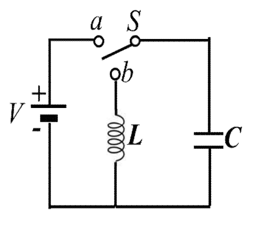
축전기는 기본적으로 평행한 두 장의 금속판으로 구성되어 있다. 축전기를 전원에 연결하면, 각 판에 (+)전하와 (-)전하를 저장할 수 있다. 이 전하들에 의해 두 극판 사이에는 전기장이 생성되어 전기에너지를 저장할 수 있다. [그림 1]과 같이 축전기(C)와 저항(R)을 전원에 직렬로 연결하고 스위치를 a에 연결하면, 축전기의 아래 판에는 (-)전하가 쌓이고, 윗 판에는 (+)전하가 쌓인다. 전하들은 축전기의 전압이 전원의 전압 V와 같아질 때까지 쌓인다. 충분히 충전된 후, 스위치를 b에 연결하면 충전된 전하들은 충전 때와 반대 방향으로 움직인다. 그래서 저항을 통해 축전기의 전압이 0이 될 때까지 방전된다.

(나)

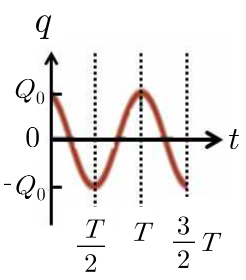
[그림 2]와 같이 전원, 코일, 축전기로 이루어진 회로에서 스위치를 a에 연결하여 축전기를 충분히 충전하였다. 전기용량 C인 축전기에 걸리는 전압이 V가 되었을 때 축전기에 저장된 전기에너지는 $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ 또는 $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$이다. 여기에서 q는 한 쪽 극판에 쌓인 전하량이다. 시간 $t=0$에서 스위치를 b에 연결하면 축전기로부터 전하가 이동하게 된다. 시간이 지나서 코일에 전류가 흐르게 되면 코일 주변에 자기장이 형성되어 자기에너지가 저장된다. 자체유도계수(또는 유도용량) L인 코일에 전류 I가 흐를 때 코일에 저장되는 자기에너지는 $U_B = \frac{1}{2}LI^2$이다. 시간이 지남에 따라 전기에너지는 자기에너지로, 자기에너지는 전기에너지로 전환된다. 그래서 전기장과 자기장이 반복적으로 생기고 전류의 흐름에 진동이 발생하게 되는데, 이때의 진동수를 공진(또는 고유) 진동수라 하고 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$로 나타낸다.



[그림 1]



[그림 2]



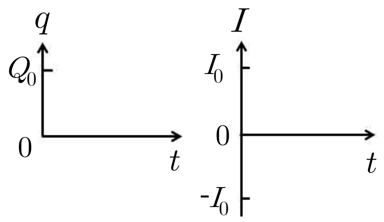
[그림 3]

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

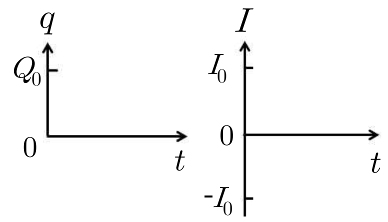
【1-1】

(가)에 근거하여, 충전할 때와 방전할 때의 시간(t)에 대한 축전기의 전하량(q) 및 회로에 흐르는 전류(I)의 그래프를 각각 그리시오. (단, q는 한 쪽 극판에 쌓인 전하량, Q_0는 축전기에 저장되는 최대 전하량, I_0는 회로에 흐르는 최대 전류값을 의미한다. 전류의 경우 [그림 1]에서 시계 방향을 (+), 시계 반대 방향을 (-)로 나타낸다.) (20점)

<충전할 때>

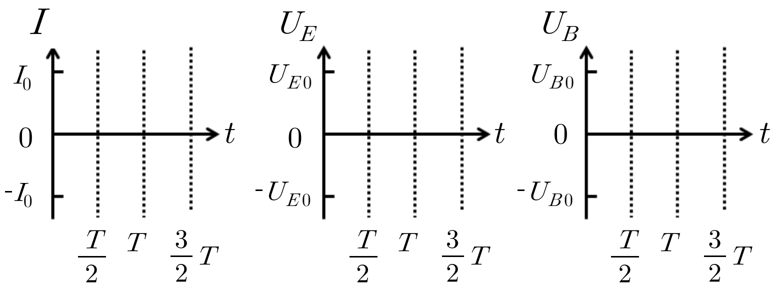


<방전할 때>



【1-2】

(나)를 참고하여 [그림 3]의 경우에 해당하는 시간에 대한 전류(I), 전기에너지(U_E) 및 자기에너지(U_B) 그래프를 각각 그리시오. (단, T는 회로의 전류가 진동하는 주기, q는 한 쪽 극판에 쌓인 전하량, Q_0는 축전기에 저장되는 최대 전하량, I_0는 회로에 흐르는 최대 전류값, U_{E0}는 축전기에 저장되는 최대 전기에너지, U_{B0}는 코일에 저장되는 최대 자기에너지를 의미한다. 전류의 경우 [그림 2]에서 시계 방향을 (+), 시계 반대 방향을 (-)로 나타낸다.) (30점)



【1-3】

(1) [그림 2]와 같은 회로에 직류 200 V 전원, 10 μF (=10×10⁻⁶ F)의 전기용량을 가지는 축전기, 0.01 H의 자체유도계수를 가지는 코일을 사용하였다. 스위치를 a에 연결하여 충분히 충전한 후에, 시간 $t=0$에서 스위치를 b로 연결했다. (나)를 참고하여, 이 회로에서 전류가 진동하는 주기(T)를 구하시오. (단, 회로의 저항은 무시하고 에너지가 회로에서 전자기파로 방사되지 않는다고 가정한다. 계산의 편의를 위해 $\pi \approx 3$, $\sqrt{10} \approx 3$으로 계산하자.) (20점)

(2) (1)에 주어진 회로에서 $t=0$에서의 전기에너지를 계산하고, $t=3T/4$에서 자기에너지의 값은 얼마인지 에너지와 관계된 물리 법칙을 사용하여 구하시오. (30점)

화학

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

수소 원자(H)의 원자가 전자는 1개이다. 2개의 수소 원자가 결합할 때는 각 수소 원자에서 전자를 1개씩 내놓고 그 전자쌍을 공유하여 단일 결합을 형성한다. 16족인 산소 원자(O)는 원자가 전자가 6개이므로 2개의 전자를 얻으면 옥텟 규칙을 만족하여 안정해진다. 따라서 산소 원자는 다른 산소 원자와 2개의 전자쌍을 서로 공유하면서 이중 결합을 형성한다. 이중 결합의 결합력은 단일 결합보다 강하고 삼중 결합보다 약하다. H_2O에서 2개의 수소 원자와 1개의 산소 원자가 서로의 전자를 공유하면 산소 원자는 옥텟 규칙을 만족하면서 안정한 물 분자를 이루게 된다. 전기 음성도는 H, C, N, O 순으로 커지며, H와 C의 전기 음성도 차이는 비교적 작다. 물 분자에서 공유 전자쌍이 전기 음성도가 더 큰 O 원자 쪽으로 치우쳐 있기 때문에 물 분자는 극성을 나타낸다. 극성 분자에서 부분적으로 양전하를 띠는 원자는 전자를 얻기 쉽고, 부분적으로 음전하를 띠는 원자는 전자를 잃기 쉽다. 수소 원자 4개와 탄소 원자 1개가 결합하면 메테인(CH_4) 분자가 된다. 메테인은 사면체 구조를 가지므로 무극성 분자가 된다. 극성 분자는 극성 분자끼리 잘 섞이고 무극성 분자는 무극성 분자끼리 잘 섞인다. 또한 물은 전기 분해를 통하여 수소 기체와 산소 기체로 분해될 수 있다. 전기 분해할 때, (−)극에서는 수소 기체가, (+)극에서는 산소 기체가 발생한다. 이로써 전자쌍을 공유하면서 형성된 공유 결합 물질은 전자가 관여한 물질임을 알 수 있다.

(나)

어떤 물질이 산소와 결합하거나 전자를 잃는 반응을 산화 반응이라 한다. 어떤 원소가 산소와 반응할 때 그 원소는 전자를 내어주어 산화된다. 전기 음성도가 상대적으로 큰 원소와 결합하는 것도 산화 반응이다. 할로젠 원소의 전기 음성도는 I, Br, Cl, F 순으로 커진다. 산소와의 결합이 끊어지거나 전자를 얻는 반응을 환원 반응이라 한다. 공유 결합 물질에서 전기 음성도 차이를 이용하여 산화-환원 반응을 설명할 수 있다. 공유 결합 물질에서 공유 전자쌍이 전기 음성도가 더 큰 원자로 완전히 이동했다고 가정할 때, 각 원자가 갖는 전하수를 산화수라고 한다. 예를 들면, 물 분자에서 산소의 산화수는 −2이고, 수소의 산화수는 +1이 된다. 전기 음성도가 작은 금속 원자는 원자가 전자가 쉽게 떨어져 나가므로 전자를 내놓고 양이온의 형태로 안정하게 존재할 수 있다. 알칼리 금속과 용매와의 반응성은 용매의 극성이 커질수록 증가한다.

(다)

산과 염기는 다양하게 정의할 수 있다. 아레니우스는 물에 녹았을 때 수소 이온(H^+)을 내놓는 물질을 산으로, 수산화 이온(OH^-)을 내놓는 물질을 염기로 정의하였다. 브뢴스테드-로우리는 산은 H^+을 내놓는 물질이고, 염기는 H^+을 받아들이는 물질이라고 규정하였다. 루이스는 비공유 전자쌍을 받는 물질을 산, 비공유 전자쌍을 주는 물질을 염기라고 규정하였다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

산소 분자와 질소 분자는 공기의 약 99%를 차지한다. 질소는 15족 원소이다. 가장 안정한 상태의 산소 분자와 질소 분자를 루이스 전자점식으로 나타내고, 산소 분자와 질소 분자의 결합 세기를 **(가)**에 근거하여 비교 설명하시오. (30점)

【1-2】

소량의 NaI 수용액이 들어있는 시험관에 NaI 몰수의 절반에 해당하는 염소수($Cl_2(aq)$)를 넣고 흔들어준다. 그리고 시험관에 액체 사염화탄소(CCl_4)를 넣어서 다시 흔들어 준 다음 일정 시간이 지난 후 변화를 관찰하였다. 화학 반응식을 완성하고, 물 층과 사염화탄소 층에서 일어나는 반응 또는 현상을 **(가)**와 **(나)**에 근거하여 설명하시오. (단, 염소수 내의 염소(Cl_2)는 분자 형태를 유지하고 증발은 없다고 가정한다.) (30점)

【1-3】

일정량의 금속 나트륨을 액체 메탄올(CH_3OH)이 들어있는 비커에 넣었더니 수소 기체가 발생하고, 반응이 끝난 후 맑은 용액이 되었다.

(1) 위 반응에 대한 화학 반응식을 완성하시오. (10점)

(2) 위 반응이 일어난 이유를 **(가)**와 **(나)**에 근거하여 설명하시오. (15점)

(3) 수소 기체를 제외한 생성물 중 산에 해당하는 것을 찾고, 그렇게 판단한 이유를 **(다)**에 근거하여 설명하시오. (15점)

생명 과학

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

진핵세포는 모양과 크기가 같은 상동 염색체를 쌍으로 갖고 있으며, 이와 같은 세포를 이배체(2n) 세포라고 한다. DNA는 세포주기의 간기에 복제되어 분열기 동안에는 자매 염색 분체 형태로 존재한다. 이배체의 생식 모세포는 감수 1분열과 감수 2분열을 통해서 반수체(n)인 생식 세포를 만든다. 감수 분열 동안 염색체 비분리 현상이 일어나면 생식 세포의 염색체 수에 이상이 생긴다. 드물기는 하지만 모든 상동 염색체가 분리되지 않아서 사배체(4n)의 식물이 생기기도 한다. 육종 학자들은 이를 활용하여 새로운 품종을 개발한다.

(나)

서로 다른 대립 형질을 쌍으로 갖는 순종 간에 교배가 일어나면 잡종 1대에서 부모 중 한쪽의 형질만 나타난다. 이때 표현되는 대립 형질을 우성, 그렇지 않은 것을 열성이라고 한다. 이 잡종 1대를 자가 수분시켜 얻은 잡종 2대에서는 우성 대립 형질과 열성 대립 형질을 나타내는 자손의 비율이 약 3:1이다. 멘델은 이와 같은 결과를 해석하기 위해서 우성과 열성 현상을 포함해서 분리의 법칙을 제안하였다. 즉, 대립 유전인자는 쌍을 이루고 있고, 이 대립 유전인자 쌍은 생식 세포가 만들어 질 때 분리되어 각각 다른 세포로 들어간다는 것이다. 멘델의 분리의 법칙으로 유전 현상이 잘 설명되는 이유는 대립 유전인자가 실제로 상동 염색체에 존재하고, 이 상동 염색체 쌍이 감수 분열 동안 각각의 생식 세포로 분리되기 때문이다

(다)

하나의 염색체에는 많은 수의 유전자가 있다. 각 염색체에 있는 유전자들은 연관되어 있으며, 이들은 하나의 연관군을 이룬다. 연관군의 수는 생식 세포의 염색체 수와 같으므로 사람이 가지고 있는 유전자 연관군은 23개이다. 생식 세포가 만들어 질 때 연관 유전자들은 함께 행동하기 때문에 멘델의 독립의 법칙을 따르지 않는다. 그러나 연관 유전자 간의 연관이 깨지는 경우도 빈번하게 발생한다. 이것은 상동 염색체가 분리되기 전에 염색체의 특정 위치에서 교차가 일어나기 때문이다. 교차의 발생 빈도는 염색체 상에서의 두 유전자 간의 거리에 비례한다. 이런 연관과 교차의 특성 때문에 동일한 염색체에 있는 대부분의 유전 형질은 함께 유전되지만, 어떤 유전 형질들은 독립적으로 유전되는 경향이 있다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

(1) 이배체인 생식 모세포의 감수 1분열이 끝나서 만들어진 딸세포의 핵상은 n이 된다. 이어서 감수 2분열이 완료되고 생식세포가 만들어지는데, 이들의 핵상도 여전히 n이다. 그 이유를 설명하시오. (10점)

(2) 하나의 생식 모세포로부터 만들어진 4개의 생식 세포 중 2개의 세포에서 염색체 수에 이상이 생겼다. 그 이유를 설명하시오. (10점)

【1-2】

육종 학자가 유전자 R과 r을 가진 이배체의 완두로부터 사배체의 완두를 만들었다. 아래의 <자료>는 이 사배체 완두에 대한 설명이다.

<자료>

㉠ R은 완두 씨의 모양을 둥글게 하는 유전 형질, r은 주름지게 하는 유전 형질이다.
㉡ R과 r의 유전은 멘델의 법칙을 따른다.
㉢ R은 r에 대해 완전 우성이다.
㉣ 감수 분열 과정에서 상동 염색체가 4분 염색체를 형성하는 경우는 세 가지가 있다.
㉤ 이배체와 사배체의 생식 세포가 가진 유전자형의 비는 서로 다르다.

(1) 사배체 완두가 만드는 생식 세포의 유전자형 종류와 그 비를 구하고(10점), 풀이 과정을 설명하시오(10점).

(2) 사배체 완두에서 열린 완두콩의 유전자형 종류와 그 비를 구하고(5점), 풀이 과정을 설명하시오(10점).

(3) 사배체 완두에서 열린 완두콩의 표현형 종류와 그 비를 구하시오. (5점)

【1-3】

완두가 가진 유전 형질의 특성을 알아보기 위해 AABBCCDD와 aabbccdd를 교배하여 잡종 1대를 얻었다. 이 잡종 1대를 자가 수분시켜 자손 2대를 얻었다. 다음 표는 자손 2대의 표현형과 개체수를 정리한 것이다. A, B, C, D는 a, b, c, d에 대해 각각 완전 우성이다.

표현형	개체수	표현형	개체수	표현형	개체수
A_B_	1,050	A_C_	1,408	A_D_	1,541
A_bb	345	A_cc	0	A_dd	115
aaB_	352	aaC_	0	aaD_	110
aabb	120	aacc	260	aadd	510

(1) A와 B의 연관성을 결정하고, 그 이유를 설명하시오. (20점)

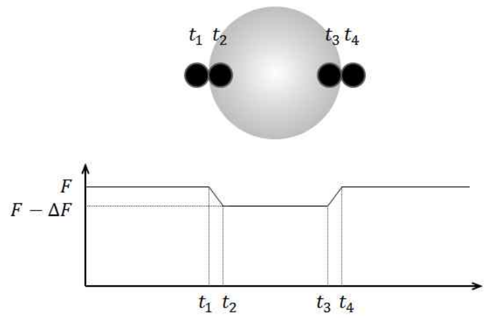
(2) 염색체 상에서의 A와 C, D 간의 상대적인 거리를 설명하시오. (20점)

지구 과학

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

케플러 우주 망원경은 행성이 항성 앞을 지나갈 때 일으키는 식 현상을 관측함으로써 1,000개가 넘는 외계 행성을 발견하였다. 행성은 가시광선을 거의 내지 않으므로 [그림 1]과 같이 행성이 관측자와 항성 사이에 위치하게 되면 항성의 밝기가 감소한다. 밝기 F가 ΔF 만큼 감소했을 때 밝기 감소율 $\frac{\Delta F}{F}$는 (행성의 면적)/(항성의 면적)으로 표현할 수 있다. 구형 천체의 표면적이 (반지름)^{2}에 비례한다는 점을 고려하면, 행성의 크기가 클수록 항성의 밝기 변화 정도가 커질 것이라고 유추할 수 있다.



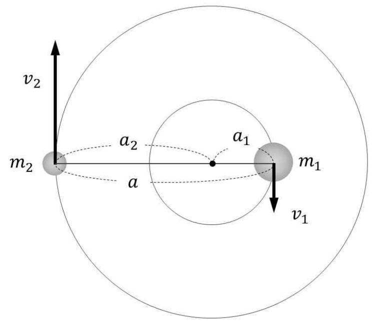
[그림 1]

(나)

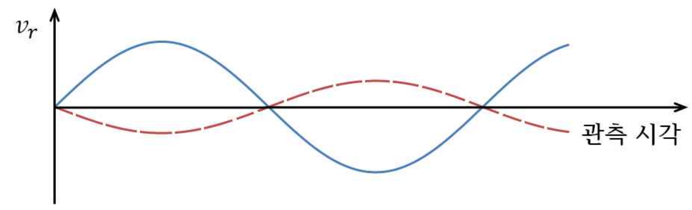
가장 널리 사용되는 외계 행성 탐색 방식은 별빛의 도플러 효과를 이용하는 것이다. 별이 행성을 거느리고 있다면 별과 행성은 질량 중심을 중심으로 공전하게 된다. 이때 별은 지구로부터 주기적으로 멀어졌다 가까워지기 때문에 도플러 효과에 의한 별빛의 파장 편이량이 나타난다. 따라서 별 스펙트럼에서 흡수선을 분석하면 외계 행성의 존재를 확인할 수 있다.

(다)

[그림 2]와 같이 질량이 m_1인 천체와 m_2인 천체가 질량 중심을 중심으로 각각 원운동한다고 생각하자. 두 천체가 질량 중심에서 각각 a_1과 a_2 떨어진 거리에서 v_1과 v_2의 속도로 원운동한다면 주기 P는 케플러 제 3법칙으로부터 $P^2 \propto a^3$임을 알 수 있다. 여기에서 두 천체 사이의 거리 a는 $a = a_1 + a_2$이다. 공전 주기 P는 두 천체의 공전 속도 v_1과 v_2에 대해 $v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$와 $v_2 = \frac{2\pi a_2}{P}$의 관계를 만족한다. 그러므로 질량 중심의 성질인 $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$에서 $\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}$의 관계가 성립함을 알 수 있다. [그림 3]은 두 천체가 질량 중심을 중심으로 원운동할 때, 도플러 효과를 이용하여 관측할 수 있는 시선 속도 곡선이다. 도플러 효과 공식에 따르면, 시선 속도와 분광선 파장과의 관계는 $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$을 만족한다. 여기에서 λ_0는 방출된 파장, λ는 관측된 파장, v_r은 천체의 시선 속도, c는 빛의 속도이다.



[그림 2]



[그림 3]

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

(가)에 근거하여 행성의 항성식으로 인한 밝기 감소율 $\frac{\Delta F}{F}$를 항성의 반지름 R_S와 행성의 반지름 R_P를 포함한 식으로 나타내시오. (30점)

【1-2】

두 천체가 질량 차이가 상당한 ($m_1 \gg m_2$) 별과 행성이라고 가정할 때, (다)에 근거하여 행성의 공전 속도 v_2와 행성의 공전 궤도 반지름 a_2의 관계식을 유도하고 설명하시오. (30점)

【1-3】

(가)와 (나)에 의하면 관측되는 항성의 밝기 감소율이 클수록, 흡수선의 편이량이 클수록 외계 행성을 발견할 확률이 커진다고 할 수 있다.

(1) 항성의 밝기 감소율이 크게 나타날 조건을 (가)에 근거하여 설명하시오. (20점)

(2) 흡수선의 편이량이 크게 나타날 조건을 (다)에 근거하여 설명하시오. (20점)

2016학년도 경북대학교 논술(AAT) 문제 해설

자연계열 I

1. 논술(AAT)의 목적과 출제 방향

가) 목적

경북대 자연계열 논술(AAT)은 21세기 눈부시게 발전하는 과학기술과 지식기반사회에 부응하는 통합적이고 논리적인 사유를 하는 인재를 선발하고 육성하여 국가와 세계가 필요로 하는 과학기술자를 양성하려는데 목적이 있다. 그러한 목적에 부합하는 인재를 선발하고자 단순히 암기한 내용의 학습, 선수학습 등을 통하여 얻어진 학생들의 지식의 양을 측정하는 것이 아니라, 주어진 단서들을 토대로 문제를 해결해가는 과정에서 발휘하는 논리적 분석력 및 사고력, 문제해결능력 등을 통하여 나타나는 종합적인 능력을 객관적으로 평가하려는데 목적이 있다. 논술(AAT)은 이런 목적에서 암기 위주의 교육에서 벗어나 자기 주도적인 학습능력, 독서와 토론 등을 통한 사고능력의 배양을 권장하는 학습 분위기를 유도하고자 한다.

나) 출제의 기본 방향

자연계열 논술(AAT)은 고등학교 교과목에 나오는 기본 개념과 원리에 대한 이해력을 바탕으로 주어진 문제를 풀어가는 논리적 분석력 및 사고력, 문제해결능력 등을 객관적으로 평가할 수 있는 문제를 출제하였다.

출제 유형은 제시문과 함께 주어진 다수의 문항 각각에 대해 답하는 약술형이다. 자연계열 I은 제시문과 물음에서 인문사회계열 학생들이 자연계열 학생들에 비하여 불이익을 받지 않도록 출제하고 있으나, 자연계열 II는 변별력의 확보를 위하여 수학 II와 과학탐구영역 II의 내용을 포함하고 있다.

2. 문항의 구성 및 특징

수학 I : 다항함수의 활용 - 기호 $\sum$로 표현된 함수를 제시문에 주어진 $\sum$의 성질을 이용하여 간략히 나타낸 후, 함수의 미분과 적분을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. 이 과정에서 $\sum$의 의미와 성질을 이해하는지, 다항함수를 미분할 수 있는지, 합으로 표현된 값의 최댓값을 추론할 수 있는지, 다항함수의 적분을 활용하여 새로운 합의 공식을 계산할 수 있는지를 묻는 문제로서 수학적 기호의 이해, 수학적 추론 능력, 종합적인 사고력을 측정하고자 하였다.

수학 I, II (공통) : 확률과 점화식의 활용 - 제시문의 사전지식을 읽고 이해하여 문제를 해결할 수 있는 수학적 사고력, 추론 능력 등을 종합적으로 평가하고자 하였다. 알고 있는 수학적인 기교가 아니라 지문을 이해하고 분석하는 능력을 평가함으로써 대학 수학 능력의 정도를 검정 하고자 하였다.

수학 II : 구와 원기둥의 대응- 구의 두 점을 제외하면 원기둥의 일부분과 일대응 대응됨을 알 수 있는데 이것은 지구의 지도를 제작하는데 이용된다. 수학을 실생활에 연계 적용하여 학생들의 이해력 및 추론능력을 판단하고 수학의 기본개념을 실생활 문제에 적용, 해결해 나가는 능력을 알 수 있는가를 판단하고자 하였다.

물리 : 회로의 공명현상 - 일상생활에서 널리 사용되고 있는 축전기와 코일의 특성에 대한 이해 정도, 축전기, 코일, 저항으로 구성된 회로에서 시간에 따른 물리량들의 변화에 대한 추론 정도, 방송에서 활용되는 회로의 공명상태에 관계된 물리적 현상을 이해하고 분석하는 능력을 평가하고자 하였다.

화학: 공유 결합 물질과 산화-환원 반응 및 산-염기 정의 - 공유 결합 분자의 구조와 산화-환원 반응에 대한 기초적인 지식을 바탕으로 전기 음성도 차이에 근거한 전자 이동, 분자의 극성과 반응성, 산-염기 개념 등을 종합적으로 이해 및 분석하는 능력을 평가하고자 하였다.

생명 과학: 세포와 유전 - 세포 분열은 유전 물질을 전달하여 다음 세대의 생명을 만드는 생물체의 핵심적인 속성이다. 제시문을 바탕으로 세포 분열 과정과 유전을 이해할 수 있는지를 평가하고, 구체적인 실험 자료를 분석하여 이 두 과정 간의 논리적 연결성을 추론할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

지구 과학: 외계 행성 탐사 - 최근 들어 천문학 분야의 뜨거운 연구 분야이자 일반인의 관심이 높은 외계 행성 탐사를 다루고 있다. 외계 행성 탐사 방법을 제시하여 탐사 방식의 구체적인 특징을 논리적인 사고를 통해 추론하는 능력을 종합적으로 평가하고자 하였다.

3. 문항 해설

수학(문제 1)

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

자연수 n과 실수 $a_{ij}(i=1,2,....,n,\ j=1,2,...,n)$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\\ &= (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})\\ &\quad +\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})\end{aligned}$$

이다. 특히 $a_{ij}=c_i d_j$ ($c_i,\ d_j$는 실수)인 경우에

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i d_j &= (c_1d_1+c_1d_2+\cdots+c_1d_n)+(c_2d_1+c_2d_2+\cdots+c_2d_n)\\ &\quad +\cdots(c_nd_1+c_nd_2+\cdots+c_nd_n)\\ &= c_1\sum_{j=1}^{n}d_j+c_2\sum_{j=1}^{n}d_j+\cdots+c_n\sum_{j=1}^{n}d_j\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\right)\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i d_j=(c_1+c_2+\cdots+c_n)(d_1+d_2+\cdots+d_n)$$

이 성립한다.

(나)

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $F'(x)=f(x)$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

가 성립한다.

(다)

$c_i \geq 0\ (i=1,2,...,n)$이고 $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$일 때, $\sum_{i=1}^{n}ic_i$의 최댓값은 n이다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

자연수 n과 $\sum_{i=1}^{n}a_i=4$인 실수 $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$에 대하여 함수

$$f(x)=x^3-\frac{5}{4}n^6+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x-a_i)(x-a_j)$$

가

$$\int_0^1 f'(x)dx=1+n^2-n^4$$

을 만족시킨다.

(1) (가)와 (나)를 이용하여 자연수 n의 값을 구하시오. (20점)

(2) 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (15점)

(3) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (15점)

【1-2】

실수 $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{15}$에 대하여 함수

$$g(x)=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}b_i\,x^{i+j}$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $b_i \geq 0\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ 15)$이고 $\sum_{i=1}^{15}b_i=1$일 때, (가)와 (다)를 이용하여 $g'(1)$의 최댓값을 구하시오. (20점)

(2) $b_i=(-1)^i\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ 15)$일 때, 적분 $\int_0^1(1-x^2)g(x)dx$를 이용하여

$$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}$$

의 값을 구하는 과정이다.

> $b_i=(-1)^i$이므로 (가)를 이용하여 $g(x)$를 구하면
>
> $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\boxed{\text{①}}}{1-x^2} & (x\neq 1,-1)\\ -15 & (x=1,-1)\end{cases}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\int_0^1(1-x^2)g(x)dx=\boxed{\text{②}}$$
>
> 이다. 한편 $g(x)=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}(-1)^i x^{i+j}$이므로
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1(1-x^2)g(x)dx &= \sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}(-1)^i\int_0^1\boxed{\text{③}}\,dx\\ &= 2\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}\end{aligned}$$
>
> 이다. 따라서
>
> $$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}=\frac{1}{2}\times\boxed{\text{②}}$$
>
> 이다.

위의 과정에서 ①, ②, ③에 들어갈 알맞은 식 또는 값을 구하시오. (30점)

● 관련 교과서 내용

☞ 고등학교 교과서『수학 II』- 합의 기호, 급수

☞ 고등학교 교과서『미적분과 통계기본 I』- 다항함수의 미분, 다항함수의 적분

● 출제 배경

수학 I에서 배우는 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 이를 제시문의 과정에 따라 $\sum\sum$으로 확장할 수 있는지를 평가한다. 또 다항함수의 미분을 이용하여 주어진 함수의 극댓값을 구하고, 다항함수의 적분을 이용하여 넓이를 계산할 수 있는지를 평가하여 고등학교에서 배운 수학의 기본적인 개념과 지식을 함양하고 있는지를 판단하고자 한다. 나아가 곱으로 표현된 다항함수의 미분을 활용하여 미분계수의 최댓값을 구하는 과정에서 주어진 제시문을 이용하는 수학적 활용 능력을 평가하고, 다항함수의 적분을 활용하여 복잡한 합의 공식을 만드는 과정을 이해하고 적용할 수 있는 수학적 문제해결 능력과 종합적 사고 능력을 측정하려고 한다.

● 문항 해설

【1-1】 합의 기호 $\sum$으로 주어진 함수를 간략히 표현하고, 미분을 활용하여 극댓값을 구하고, 적분을 활용하여 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

【1-2】 제시문을 활용하여 미분계수의 최댓값을 계산하고, $\sum$의 성질과 적분을 활용하여 합의 공식을 찾는 과정을 이해할 수 있는지를 평가한다.

● 답안 예시

수학(문제 1)

【1-1】

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 4$ 이므로 (가)에 의하여

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \frac{5}{4}n^6 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x-a_i)(x-a_j) \\ &= x^3 - \frac{5}{4}n^6 + \left(nx - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = x^3 - \frac{5}{4}n^6 + (nx-4)^2 \end{aligned}$$

이다. 조건과 (나)에 의하여

$$1 + n^2 - n^4 = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1 + n^2 - 8n$$

이므로 $n=0$ 또는 $n=2$이다. n은 자연수이므로 $n=2$이다.

[별해] 함수 $f(x)$를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2x - a_i - a_j) \\ &= 3x^2 + 2x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1 - n\sum_{i=1}^{n}a_i - n\sum_{j=1}^{n}a_j \\ &= 3x^2 + 2n^2x - 8n \end{aligned}$$

이다. 관계식으로부터

$$1 + n^2 - n^4 = \int_0^1 f'(x)dx = \int_0^1 (3x^2 + 2n^2x - 8n)dx = 1 + n^2 - 8n$$

이므로 $n=0$ 또는 $n=2$이다. n은 자연수이므로 $n=2$이다.

(2) (1)의 결과로부터 $f(x) = x^3 + 4(x-2)^2 - 80$이므로

$$f'(x) = 3x^2 + 8(x-2) = (3x-4)(x+4)$$

이다. $f'(x)=0$이면 $x = \frac{4}{3}$, $x=-4$이다. $f(x)$는 삼차함수이므로 $x=-4$에서 극댓값을 갖는다. 그러므로 극댓값은 $f(-4)=0$ 이다.

(3) 함수 $f(x) = x^3 + 4(x-2)^2 - 80$로부터

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 16x - 64 = (x+4)^2(x-4)$$

이므로 $y=f(x)$와 x축과 둘러싸인 부분은

$$\int_{-4}^{4}|f(x)|dx = \int_{-4}^{4}\left|x^3 + 4x^2 - 16x - 64\right|dx = 2\int_0^4 |4x^2 - 64|dx = \frac{1024}{3}$$

이다.

【1-2】

(가)에 의하여

$$g(x)=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}b_i x^{i+j}=(b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{15}x^{15})(x+x^2+\cdots+x^{15})$$

이다.

(1) 함수 $g(x)$를 미분하면

$$g'(x)=(b_1+2b_2+\cdots+15b_{15}x^{14})(x+x^2+\cdots+x^{15})$$
$$+(b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{15}x^{15})(1+2x+\cdots+15x^{14})$$

이므로 $g'(1)=15\sum_{i=1}^{15}ib_i+120\sum_{i=1}^{15}b_i=15\sum_{i=1}^{15}ib_i+120$이다. (다)에 의하여 $g'(1)$의 최댓값은 15^2+120, 즉 345 이다.

(2)

(가)를 이용하여 $g(x)$를 구하면

$$g(x)=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}(-1)^i x^{i+j}=\{-x+(-x)^2+\cdots+(-x)^{15}\}(x+x^2+\cdots+x^{15})$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\boxed{-x^2+x^{32}}}{1-x^2} & (x\neq 1,-1)\\ -15 & (x=1,-1)\end{cases}$$

이므로 $(1-x^2)g(x)=\begin{cases}x^{32}-x^2 & (x\neq 1,-1)\\ 0 & (x=1,-1)\end{cases}$ 이다. 그러므로

$$\int_0^1(1-x^2)g(x)dx=\int_0^1\boxed{x^{32}-x^2}dx=\boxed{-\frac{10}{33}}$$

이다. 한편 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^i x^{i+j}$ 이므로

$$\int_0^1(1-x^2)g(x)dx=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}(-1)^i\int_0^1\boxed{(1-x^2)x^{i+j}}\,dx$$
$$=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{2\times(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}$$

이다. 따라서

$$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{(-1)^i}{(i+j+1)(i+j+3)}=\frac{1}{2}\times\boxed{-\frac{10}{33}}$$

이다.

따라서 ① $=x^{32}-x^2$, ② $=-\dfrac{10}{33}$, ③ $=(1-x^2)x^{i+j}$ 이다.

수학(문제 2)

[2] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

수열 $a_0, a_1, a_2, \ldots$이 점화식 $Aa_{n+2}+Ba_{n+1}+Ca_n=0$ (단, $A(\neq 0)$, B, C는 상수, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$)을 만족할 때, 방정식 $Ax^2+Bx+C=0$을 위 점화식의 보조방정식이라고 한다. 보조방정식의 두 근을 α, β라고 할 때, 수열 일반항 a_n은

$\alpha\neq\beta$이면 $a_n=D\alpha^n+E\beta^n$, $\alpha=\beta$이면 $a_n=(F+Gn)\alpha^n$이다.

(단, D, E, F, G는 상수이다.)

(나)

가위바위보 게임:

가위, 바위, 보 중 하나를 골라서 낸다. 승패 규칙은 보는 바위를 이기고, 바위는 가위를 이기고, 가위는 보를 이긴다. 같은 것을 내면 비긴다.

(다)

(i) 표본공간을 S라 하자. 서로 배반인 사건들 $B_1, B_2, \ldots, B_n$이 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$일 때, $B_1, B_2, \ldots, B_n$을 S의 분할이라고 한다.

이때, 임의의 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는 $\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A\cap B_i)$이다.

(ii) 조건부 확률은 어떤 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 확률을 의미하고, $\mathrm{P}(A|B)$로 나타내며, $\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【2-1】

(가)를 이용하여 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geq 2)$, $a_0=0$, $a_1=1$을 만족하는 수열의 일반항 a_n이 아래와 같음을 보이시오. (20점)

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

【2-2】

성태는 4만원을 가지고 있으며 세림은 6만원을 가지고 있다. 성태와 세림이가 반복해서 가위바위보 게임을 하며, 각 게임 때마다 이긴 사람이 상대방으로부터 1만원을 얻는다. 세림이와 성태가 가위, 바위, 보를 각각 선택할 확률은 동일하다고 가정하자.

(1) 가위바위보 게임을 한번 할 때, 성태가 세림이를 이길 확률, 비길 확률, 질 확률을 각각 계산하시오. (10점)

(2) 성태 또는 세림이가 10만원을 가지게 되면 모든 게임은 끝난다. 성태가 10만원을 가지게 되어 모든 게임이 종료될 확률이 얼마인지를 알고자 한다.

성태가 n만원을 가지고 있을 때 돈을 모두 잃기 전에 10만원에 도달할 확률을 p_n이라 하자. 그러면, $p_0=0$, $p_{10}=1$임을 알 수 있다.

(나)와 (다)를 이용하여, 확률 p_{n-1}, p_n, p_{n+1} $(n=1, 2, \ldots, 9)$ 사이의 점화식을 구하면,

①	(10점)

이므로, 이 점화식의 보조방정식의 근은

②	(10점)

이다. 따라서 (가)에 의하여, p_n은

③ $p_n=$	(5점)

이다. 성태가 4만원을 가지고 이 게임을 시작하여 돈을 모두 잃기 전에 10만원에 도달하게 될 확률 p_4는

④ $p_4=$	(5점)

이다.

위의 빈칸 ①, ②, ③, ④에 맞는 식이나 값을 구하시오.

【2-3】

어떤 회사의 주식이 아래와 같은 확률로 매일 변한다고 하자.

㉠ 오늘의 주가(=주식의 가격)가 20만원일 때, 내일의 주가가 21만원이 될 확률은 0.5이고, 19만원이 될 확률도 0.5이다.

㉡ 오늘의 주가가 $x(x>20)$만원일 때, 내일의 주가가 $(x+1)$만원이 될 확률은 $\frac{1}{3}$이고, $(x-1)$만원이 될 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

㉢ 오늘의 주가가 $y(1\leq y<20)$만원일 때, 내일의 주가가 $(y+1)$만원이 될 확률은 $\frac{2}{3}$이고, $(y-1)$만원이 될 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

나은이는 오늘 이 회사의 주식을 21만원에 구매하였다. 나은이는 주가가 30만원이나 19만원이 되면 팔고자 한다. 주가가 19만원이 되어 팔기 전에 30만원이 되어 팔 확률이 얼마인지를 (가)와 (다)를 이용하여 구하시오. (40점)

● 관련 교과서 내용

☞ 고등학교 교과서『미적분과 통계기본 I』- 확률

● 출제 배경

본 문제에서는 자연과학에서 널리 이용되고 있는 확률 개념을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 주어진 제시문을 통하여 적용할 수 있는지 판단하고자 하였다. 특히, 문제의 목적은 주어진 제시문을 통하여 학생들의 이해력 및 응용력, 추론능력을 판단하고 고등학교 수학 교과과정에서 배운 수학의 기본개념을 적용하여 문제를 해결해나가는 능력을 판단하고자 하는 것이다. 본 문제의 해결을 위해 요구되는 수학적 지식보다는 제시문의 지식을 이해하고 이를 통하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 여부를 종합적으로 평가하고자 것이 출제의 배경이다.

● 문항 해설

【2-1】 제시문 (가)의 내용을 이해하고 적용할 수 있는 지를 평가한다.

【2-2】 제시문 (나)와 (다)의 조건부확률과 분할정리를 이해 밀 활용 할 수 있는가를 평가한다.

【2-3】 에서는 【2-1】과 【2-2】의 전체 능력을 검정 하고자한다.

● 답안 예시

수학(문제 2)

【2-1】

점화식의 보조 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근은 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$이므로, 일반항$a_n$은 $a_n=A\alpha^n+B\beta^n \quad (A,B\in$상수$)$이다.

$a_0=A+B=0$, $a_1=A\alpha+B\beta=1$이므로, $(\alpha-\beta)B=-1$, $B=\frac{1}{\beta-\alpha}$, $A=-B=\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$이다.

따라서, $a_n=A\alpha^n+(-A)\beta^n=A(\alpha^n-\beta^n)=A\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$이다.

【2-2】

(1)

성태	세림	성태의 승패
가위	가위	비김
	바위	짐
	보	이김
바위	가위	이김
	바위	비김
	보	짐
보	가위	짐
	바위	이김
	보	비김

따라서, 이길 확률= 3/9= 1/3; 비길 확률= 3/9= 1/3; 질 확률= 3/9= 1/3.

(2) 현재 성태가 n만원을 가지고 있을 때, 세림과 가위 바위 보 게임을 한 게임하면 비기는 경우, 이기는 경우, 지는 경우 의 세 경우가 생기며 세 사건은 배반 사건이다.

따라서, [제시문 3]과 [물음 2-1]에 의하여,

(가) $p_n=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}p_{n+1}+\frac{1}{3}p_{n-1}$, 즉, $2p_n=p_{n+1}+p_{n-1}$

이다.

보조방정식은

(나) $\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$,즉,$x^2-2x+1=0$

이다. $(x-1)^2=0$ 이므로, $p_n=F+nG$이다.

$0=p_0=F$, $\quad 1=p_1=F+10G$에서, $G=1/10$이다.

(다) $p_n=n/10$

이다. $p_4=$

(라) $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

수학(문제 2)

【2-3】

나은이의 주가가 n만원 일 때, 주가가 19만원 되어 팔기 전에 주가가 30만원이 될 확률을 p_n하자.

오늘의 주가가 $n(n \geq 21)$만원일 때 내일의 주가가 $(n+1)$만원일 사건과 내일의 주가가 $(n-1)$만원일 사건은 서로 배반사건이며, 오늘의 주가가 n만원일 때 내일의 주가가 $(n+1)$만원일 확률은 $\frac{1}{3}$이며 내일의 주가가 $(n-1)$만원일 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서, [제시문 2]에 의하여 $p_n =$

[주가가$(n+1)$만원될확률]$\times$[주가가$n+1$만원일때,주가가19만원되어팔기전에주가가30만원이될확률] +

[주가가$(n-1)$만원될확률]$\times$[주가가$n-1$만원일때,주가가19만원되어팔기전에주가가30만원이될확률]

$= \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{3}p_{n-1}$이다.

수열 $a_0, a_1, ..., a_{10}$을 $a_0 = p_{20}$, $a_1 = p_{21}$, $a_2 = p_{22}$, ..., $a_{10} = p_{30}$라고 하자.

그러면, $a_{10} = 1$이며, a_1을 구하여야 한다. $\mu :=\ a_1$라고 두자.

점화식$a_k = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{3}a_{k-1}$ $(k = 1,2,3,...9)$의 보조방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근은 1과 2 이므로, [제시문 1]의하여, $a_k = A + 2^k B$이다.

그런데. $a_1 = A + 2B = \mu$, $a_{10} = A + 2^{10}B = 1$ 이며,

한편 $A + B = p_{20} = \frac{1}{2}p_{19} + \frac{1}{2}p_{21} = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}\mu$이므로, $B = \frac{1}{2}\mu$, $A = 0$, $B = \frac{1}{2^{10}}$이다.

따라서, $p_{21} = a_1 = \mu = A + 2B = 0 + 2 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

(별해) 나은이의 주가가 n만원 일 때, 주가가 19만원 되어 팔기 전에 주가가 30만원이 될 확률을 p_n하자. 그러면, $p_{19} = 0$, $p_{30} = 1$

$p_{20} = \frac{1}{2}p_{19} + \frac{1}{2}p_{21} = \frac{1}{2}p_{21}$. $p_{21} = \frac{2}{3}p_{20} + \frac{1}{3}p_{22}$, $p_{22} = \frac{2}{3}p_{21} + \frac{1}{3}p_{23}$ $.p_{23} = \frac{2}{3}p_{22} + \frac{1}{3}p_{24}$, $p_{24} = \frac{2}{3}p_{23} + \frac{1}{3}p_{25}$, $p_{25} = \frac{2}{3}p_{204} + \frac{1}{3}p_{26}$

$p_{26} = \frac{2}{3}p_{25} + \frac{1}{3}p_{27}$, $p_{27} = \frac{2}{3}p_{26} + \frac{1}{3}p_{28}$, $p_{28} = \frac{2}{3}p_{27} + \frac{1}{3}p_{29}$, $p_{29} = \frac{2}{3}p_{28} + \frac{1}{3}p_{30} = \frac{2}{3}p_{28} + \frac{1}{3}$

첫째식을 둘째식에 대입하면, $p_{21} = \frac{1}{2}p_{22}$이다. 이것을 세 번째 식에 대입하면, $p_{22} = \frac{1}{2}p_{23}$이다. 이런식으로 계속 대입해나가면, $p_{29} = \frac{1}{2}p_{30} = \frac{1}{2}$이므로, $p_{21} = \frac{1}{2}p_{22}$ = $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$이다.

물리

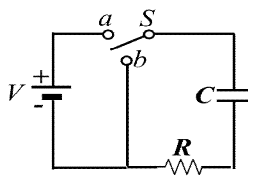
[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

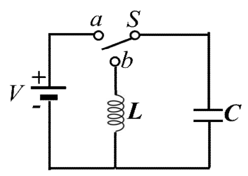
축전기는 기본적으로 평행한 두 장의 금속판으로 구성되어 있다. 축전기를 전원에 연결하면, 각 판에 (+)전하와 (-)전하를 저장할 수 있다. 이 전하들에 의해 두 극판 사이에는 전기장이 생성되어 전기에너지를 저장할 수 있다. [그림 1]과 같이 축전기(C)와 저항(R)을 전원에 직렬로 연결하고 스위치를 a에 연결하면, 축전기의 아래 판에는 (-)전하가 쌓이고, 윗 판에는 (+)전하가 쌓인다. 전하들은 축전기의 전압이 전원의 전압 V와 같아질 때까지 쌓인다. 충분히 충전된 후, 스위치를 b에 연결하면 충전된 전하들은 충전 때와 반대 방향으로 움직인다. 그래서 저항을 통해 축전기의 전압이 0이 될 때까지 방전된다.

(나)

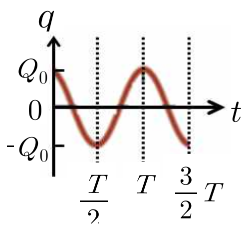
[그림 2]와 같이 전원, 코일, 축전기로 이루어진 회로에서 스위치를 a에 연결하여 축전기를 충분히 충전하였다. 전기용량 C인 축전기에 걸리는 전압이 V가 되었을 때 축전기에 저장된 전기에너지는 $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ 또는 $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$이다. 여기에서 q는 한 쪽 극판에 쌓인 전하량이다. 시간 $t=0$에서 스위치를 b에 연결하면 축전기로부터 전하가 이동하게 된다. 시간이 지나서 코일에 전류가 흐르게 되면 코일 주변에 자기장이 형성되어 자기에너지가 저장된다. 자체유도계수(또는 유도용량) L인 코일에 전류 I가 흐를 때 코일에 저장되는 자기에너지는 $U_B = \frac{1}{2}LI^2$이다. 시간이 지남에 따라 전기에너지는 자기에너지로, 자기에너지는 전기에너지로 전환된다. 그래서 전기장과 자기장이 반복적으로 생기고 전류의 흐름에 진동이 발생하게 되는데, 이때의 진동수를 공진(또는 고유) 진동수라 하고 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$로 나타낸다.



[그림 1]



[그림 2]



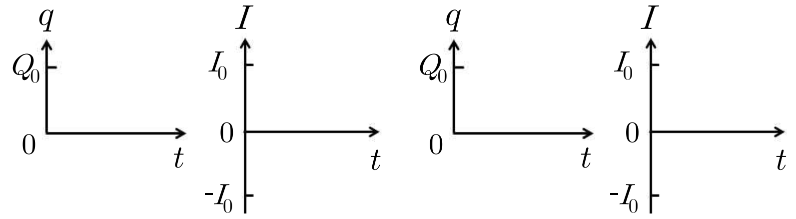
[그림 3]

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

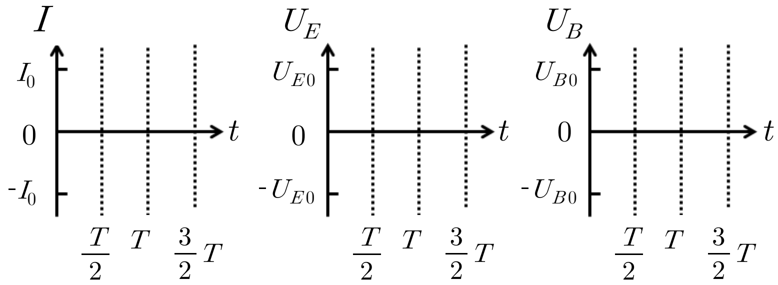
(가)에 근거하여, 충전할 때와 방전할 때의 시간(t)에 대한 축전기의 전하량(q) 및 회로에 흐르는 전류(I)의 그래프를 각각 그리시오. (단, q는 한 쪽 극판에 쌓인 전하량, Q_0는 축전기에 저장되는 최대 전하량, I_0는 회로에 흐르는 최대 전류값을 의미한다. 전류의 경우 [그림 1]에서 시계 방향을 (+), 시계 반대 방향을 (-)로 나타낸다.) (20점)

<충전할 때> <방전할 때>



【1-2】

(나)를 참고하여 [그림 3]의 경우에 해당하는 시간에 대한 전류(I), 전기에너지(U_E) 및 자기에너지(U_B) 그래프를 각각 그리시오. (단, T는 회로의 전류가 진동하는 주기, q는 한 쪽 극판에 쌓인 전하량, Q_0는 축전기에 저장되는 최대 전하량, I_0는 회로에 흐르는 최대 전류값, U_{E0}는 축전기에 저장되는 최대 전기에너지, U_{B0}는 코일에 저장되는 최대 자기에너지를 의미한다. 전류의 경우 [그림 2]에서 시계 방향을 (+), 시계 반대 방향을 (-)로 나타낸다.) (30점)



【1-3】

(1) [그림 2]와 같은 회로에 직류 $200\,\mathrm{V}$ 전원, $10\,\mu\mathrm{F}$(=$10\times10^{-6}\,\mathrm{F}$)의 전기용량을 가지는 축전기, $0.01\,\mathrm{H}$의 자체유도계수를 가지는 코일을 사용하였다. 스위치를 a에 연결하여 충분히 충전한 후에, 시간 $t=0$에서 스위치를 b로 연결했다. (나)를 참고하여, 이 회로에서 전류가 진동하는 주기(T)를 구하시오. (단, 회로의 저항은 무시하고 에너지가 회로에서 전자기파로 방사되지 않는다고 가정한다. 계산의 편의를 위해 $\pi \approx 3$, $\sqrt{10} \approx 3$으로 계산하자.) (20점)

(2) (1)에 주어진 회로에서 $t=0$에서의 전기에너지를 계산하고, $t=3T/4$에서 자기에너지의 값은 얼마인지 에너지와 관계된 물리 법칙을 사용하여 구하시오. (30점)

● **관련 교과서 내용**

☞ 고등학교 교과서 물리 I (천재교육) III. 정보와 통신 2. 정보의 전달과 저장 2) 무선통신과 방송
☞ 고등학교 교과서 물리 I (천재교육) III. 정보와 통신 2. 정보의 전달과 저장 4) 전기신호의 조절
☞ 고등학교 교과서 물리 I (교학사) III. 정보와 통신 2. 정보의 전달과 저장 2) 전자기파의 발생과 수신
☞ 고등학교 교과서 물리 I (교학사) III. 정보와 통신 2. 정보의 전달과 저장 3) 교류 회로에서의 코일과 축전기
☞ 고등학교 교과서 물리 I (교학사) III. 정보와 통신 2. 정보의 전달과 저장 4) 전자기파 신호와 정보의 인식
☞ 고등학교 교과서 물리 I (교학사) III. 정보와 통신 1. 소리와 빛 1) 소리의 특징과 속력

● **출제 배경**

‘정보와 통신’ 단원은 2009 개정 과학과 교육과정 물리 I에서 일상생활에서 물리학의 유용성을 강조하기 위해 강화된 부분이다. 방송이나 가전제품에서 광범위하게 사용되고 있는 소자인 축전기와 코일의 특성을 이해하고, 그것을 바탕으로 회로에 나타나는 물리적 특성을 파악하고 있는지를 평가하고자 하였다. 물리 I에서는 축전기의 전기용량과 코일의 자체유도계수를 정의하고, 그들의 역할을 설명하며, LC 회로에서의 전자기파의 발생과 수신원리를 설명하는 것을 목표로 삼고 있다. 본 문항들에서는 이러한 교육과정을 정상적으로 마친 학생이 제시문에 주어진 내용을 사용하여 물리적 사고를 할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 제시문의 대부분은 물리 I 교과서에서 다루고 있는 내용이며, 제시문에 구체적인 설명을 제공하여 응용력이 있는 학생이라면 충분히 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 단편적인 지식 평가를 지양하기 위해서, 그래프를 그리도록 요구하였으며 다른 단원에서의 내용과 관련시키기도 하였다.

● 문항 해설

【1-1】이 문제에서는 축전기의 기본 기능인 충전과 방전 과정에서 전하량과 전류의 변화를 파악하고 있는지를 묻고 있다. 제시문에 있듯이, 충전과정에서 축전기의 전하량은 점차 증가하며 전류는 감소하고, 방전과정에서는 축전기의 전하량은 감소하며 전류는 증가하게 된다.

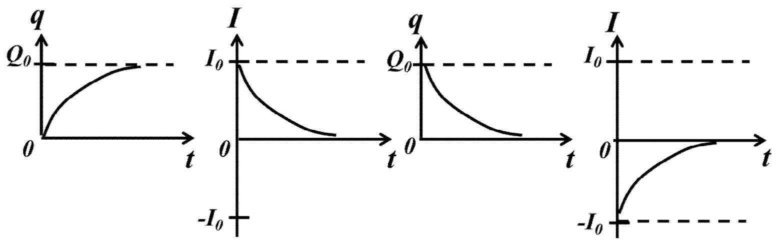
【1-2】 이 문제에서는 문항 【1-1】을 심화시켜서 제시문에 설명한대로 LC 회로에서의 진동을 전류, 전기에너지와 자기에너지로 확장할 수 있는지를 묻고 있다. 이 과정에서 필요한 수식은 제시문에 모두 제공되어 있고, 에너지 보존법칙을 사용하여 문제를 해결할 수도 있다.

【1-3】 이 문제에서는 문항 【1-2】의 상황에서 물리적 계산능력을 묻고 있다. (1)에서는 제시문에 주어진 식에 필요한 물리량을 대입하면 되며, (2)에서는 문항 【1-2】의 그래프 이해를 통해서도 문제를 해결할 수 있다.

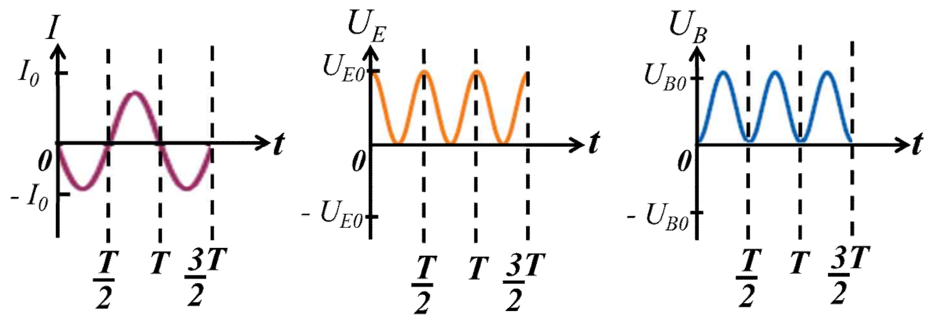
● 답안 예시

물리
【1-1】

【1-1】



【1-2】



【1-3】

(1) $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\approx\frac{1}{6\sqrt{(10\times10^{-6}\mathrm{F})(10\times10^{-3}\mathrm{H})}}=\frac{1}{6\sqrt{10^{-7}}}=\frac{1}{6}\times\sqrt{10^7}=\frac{1}{6}\times10^3\sqrt{10}=\frac{3\times10^3}{6}=500\,\mathrm{Hz}$

$\therefore T=\frac{1}{500Hz}=0.002\,\mathrm{s}=2\,\mathrm{ms}$

(2) $t=0$에서 축전기는 충분히 충전된 상태이고, 코일에 흐르는 전류가 $I=0$이고 때문에, 코일의 자기에너지는 $U_B=\frac{1}{2}LI^2=0$이며, 축전기의 전기에너지는 $U_{E0}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(10\times10^{-6}\mathrm{F})(200\mathrm{V})^2=0.2\,\mathrm{J}$ 이다. 에너지보존법칙에 따라 총에너지 U_E+U_B가 일정해야 하므로, 시간 $t=4T/3$에서 코일의 전류값이 최대인 순간이기 때문에 $U_{E0}=0$이고, $U_{B0}=0.2\,\mathrm{J}$.

화학

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)
수소 원자(H)의 원자가 전자는 1개이다. 2개의 수소 원자가 결합할 때는 각 수소 원자에서 전자를 1개씩 내놓고 그 전자쌍을 공유하여 단일 결합을 형성한다. 16족인 산소 원자(O)는 원자가 전자가 6개이므로 2개의 전자를 얻으면 옥텟 규칙을 만족하여 안정해진다. 따라서 산소 원자는 다른 산소 원자와 2개의 전자쌍을 서로 공유하면서 이중 결합을 형성한다. 이중 결합의 결합력은 단일 결합보다 강하고 삼중 결합보다 약하다. H_2O에서 2개의 수소 원자와 1개의 산소 원자가 서로의 전자를 공유하면 산소 원자는 옥텟 규칙을 만족하면서 안정한 물 분자를 이루게 된다. 전기 음성도는 H, C, N, O 순으로 커지며, H와 C의 전기 음성도 차이는 비교적 작다. 물 분자에서 공유 전자쌍이 전기 음성도가 더 큰 O 원자 쪽으로 치우쳐 있기 때문에 물 분자는 극성을 나타낸다. 극성 분자에서 부분적으로 양전하를 띠는 원자는 전자를 얻기 쉽고, 부분적으로 음전하를 띠는 원자는 전자를 잃기 쉽다. 수소 원자 4개와 탄소 원자 1개가 결합하면 메테인(CH_4) 분자가 된다. 메테인은 사면체 구조를 가지므로 무극성 분자가 된다. 극성 분자는 극성 분자끼리 잘 섞이고 무극성 분자는 무극성 분자끼리 잘 섞인다. 또한 물은 전기 분해를 통하여 수소 기체와 산소 기체로 분해될 수 있다. 전기 분해할 때, (-)극에서는 수소 기체가, (+)극에서는 산소 기체가 발생한다. 이로써 전자쌍을 공유하면서 형성된 공유 결합 물질은 전자가 관여한 물질임을 알 수 있다.

(나)
어떤 물질이 산소와 결합하거나 전자를 잃는 반응을 산화 반응이라 한다. 어떤 원소가 산소와 반응할 때 그 원소는 전자를 내어 주어 산화된다. 전기 음성도가 상대적으로 큰 원소와 결합하는 것도 산화 반응이다. 할로젠 원소의 전기 음성도는 I, Br, Cl, F 순으로 커진다. 산소와의 결합이 끊어지거나 전자를 얻는 반응을 환원 반응이라 한다. 공유 결합 물질에서 전기 음성도 차이를 이용하여 산화-환원 반응을 설명할 수 있다. 공유 결합 물질에서 공유 전자쌍이 전기 음성도가 더 큰 원자로 완전히 이동했다고 가정할 때, 각 원자가 갖는 전하수를 산화수라고 한다. 예를 들면, 물 분자에서 산소의 산화수는 −2이고, 수소의 산화수는 +1이 된다. 전기 음성도가 작은 금속 원자는 원자가 전자가 쉽게 떨어져 나가므로 전자를 내놓고 양이온의 형태로 안정하게 존재할 수 있다. 알칼리 금속과 용매와의 반응성은 용매의 극성이 커질수록 증가한다.

(다)
산과 염기는 다양하게 정의할 수 있다. 아레니우스는 물에 녹았을 때 수소 이온(H^+)을 내놓는 물질을 산으로, 수산화 이온(OH^-)을 내놓는 물질을 염기로 정의하였다. 브뢴스테드-로우리는 산은 H^+을 내놓는 물질이고, 염기는 H^+을 받아들이는 물질이라고 규정하였다. 루이스는 비공유 전자쌍을 받는 물질을 산, 비공유 전자쌍을 주는 물질을 염기라고 규정하였다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】
산소 분자와 질소 분자는 공기의 약 99%를 차지한다. 질소는 15족 원소이다. 가장 안정한 상태의 산소 분자와 질소 분자를 루이스 전자점식으로 나타내고, 산소 분자와 질소 분자의 결합 세기를 (가)에 근거하여 비교 설명하시오. (30점)

【1-2】
소량의 NaI 수용액이 들어있는 시험관에 NaI 몰수의 절반에 해당하는 염소수($Cl_2(aq)$)를 넣고 흔들어준다. 그리고 시험관에 액체 사염화탄소(CCl_4)를 넣어서 다시 흔들어 준 다음 일정 시간이 지난 후 변화를 관찰하였다. 화학 반응식을 완성하고, 물 층과 사염화탄소 층에서 일어나는 반응 또는 현상을 (가)와 (나)에 근거하여 설명하시오. (단, 염소수 내의 염소(Cl_2)는 분자 형태를 유지하고 증발은 없다고 가정한다.) (30점)

【1-3】
일정량의 금속 나트륨을 액체 메탄올(CH_3OH)이 들어있는 비커에 넣었더니 수소 기체가 발생하고, 반응이 끝난 후 맑은 용액이 되었다.

(1) 위 반응에 대한 화학 반응식을 완성하시오. (10점)

(2) 위 반응이 일어난 이유를 (가)와 (나)에 근거하여 설명하시오. (15점)

(3) 수소 기체를 제외한 생성물 중 산에 해당하는 것을 찾고, 그렇게 판단한 이유를 (다)에 근거하여 설명하시오. (15점)

● 관련 교과서 내용

☞ 고등학교 교과서『화학 I』(상상아카데미, 비상교육) III. 아름다운 분자 세계 - 화학결합의 원리, 분자의 구조, 분자의 성질, 전기 음성도와 결합의 극성

☞ 고등학교 교과서『화학 I』(상상아카데미, 비상교육) IV. 닮은 꼴 화학 반응 - 산화-환원 반응과 전자의 이동, 산화-환원 반응에서 산화수, 산과 염기의 정의

● 출제 배경

본 문항은 공유결합물질과 산화-환원 반응에 대한 것이다. 각 문항을 풀기 위하여 요구되는 화학적 지식은 화학결합과 구조, 전기 음성도와 결합의 극성, 산화-환원 반응을 통한 전자 이동, 산화수의 개념, 산과 염기의 정의 등으로 이는 고등학교 화학 I 교과과정 내에 모두 포함되어 있다. 이러한 내용을 바탕으로 분자의 안정한 구조를 나타내고, 전기 음성도와 극성으로부터 산화-환원 반응과 반응성을 해석 및 분석하는 능력을 평가하고자 하였다. 또한 반응 생성물의 상호작용에 의한 산-염기 성질을 예측하여 표현할 수 있도록 하였다. 본 문항을 통하여 제시문의 이해 및 분석능력, 주어진 내용을 바탕으로 한 논리적 사고력과 분석력 및 유추 능력을 판단하고자 하였다.

● 문항 해설

【1-1】 원소의 원자가 전자와 옥텟 규칙을 적용하여, 공기 중의 주요 구성 분자인 산소 분자와 질소 분자의 가장 안정한 상태의 루이스 전자점식을 표현할 수 있다. 이것으로부터 결합 세기를 유추할 수 있게 하였다. 본 물음은 고등학교 화학 I 과정을 성실하게 이수한 학생이 제시문을 정확히 해독할 경우 대부분 답할 수 있도록 출제되었다.

【1-2】 할로젠 원소의 전기 음성도를 이용하여 산화-환원 반응이 일어남을 유추할 수 있다. 또한, 용매 속에서 일어난 화학 현상을 생성물의 극성을 이용하여 판단하도록 문제를 출제하였다. 즉 전기 음성도 성질을 산화-환원 반응에 연관시킴으로써, 공유 결합 물질의 성질을 이용하여 산화-환원 반응 및 생성물을 예측할 수 있게 유도하였다.

【1-3】이 문제는 산화-환원 반응의 한 예로써 나트륨 금속과 극성 용매인 메탄올과의 반응에 대한 것이다. 알칼리 금속인 나트륨은 전자를 내놓는 성질이 매우 강하고 메탄올은 OH기가 극성을 띠고 있어서 반응이 일어나게 된다. 그 결과 수소 기체와 양이온과 음이온이 생성된다. 이러한 반응에 대하여 화학 반응성과 반응에 대한 이유를 제시문을 근거로 유추할 수 있게 하였다. 제시문을 통해 생성물의 산 혹은 염기의 성질을 예측할 수 있으며, 다양한 산-염기의 정의에 대한 개념을 명확히 정립할 수 있도록 하였다.

- **답안 예시**

화학

【1-1】

(가)에 의해 16족인 산소원자는 원자가 전자 개수가 6개이고 이 중에 각각 2개를 공유결합에 사용한다.
즉, 2개 전자쌍을 공유하여 이중 결합을 갖는 공유 결합 물질 O_2를 형성한다.

$:\ddot{O}::\ddot{O}:$ 또는 $:\ddot{O}=\ddot{O}:$

(가)와 문제의 제시문에 의해 15족인 질소원자는 원자가 전자가 5개이고 이 중에 각각 3개를 공유결합에 사용한다.
즉, 3개 전자쌍을 공유하여 삼중결합 N_2를 형성한다.

$\ddot{N}\vdots\vdots\ddot{N}$ 또는 $\ddot{N}\equiv\ddot{N}$

(가)에서 이중 결합의 세기가 삼중 결합의 세기보다 약하다고 했으므로 이중 결합을 갖는 O_2의 결합력은 삼중 결합을 갖는 N_2의 결합력보다 약하다.

【1-2】

물 층: $2Na^+ + 2I^- + Cl_2 \rightarrow 2Na^+ + 2Cl^- + I_2$ (또는, $2NaI + Cl_2 \rightarrow 2NaCl + I_2$)
Cl은 I보다 전기 음성도보다 크므로, Cl_2는 I^-에 의해 환원되고($Cl_2 \rightarrow 2Cl^-$), I^-는 Cl_2에 의해 산화된다($2I^- \rightarrow I_2$).
생성된 이온 Cl^-는 극성 분자인 물 층에 남는다.

사염화탄소 층:
(가)에 의해 물 층에서 생성된 분자 I_2는 무극성이다. 무극성 분자인 I_2는 무극성 용매 CCl_4에 녹는다.

【1-3】

(1) 화학반응식: $2Na + 2CH_3OH \rightarrow 2Na^+ + 2CH_3O^- + H_2$

(2) 메탄올의 수소 중에서 산소와 직접 연결된 수소는 산소와의 전기음성도 차이가 크므로 O-H 결합의 극성이 커지게 되어 알칼리 금속인 나트륨과 강하게 반응한다. 반면, (가)에 의해 C-H 결합은 전기 음성도 차이가 작고 반응에 참여하지 않는다. 알칼리 금속인 나트륨은 원자가 전자가 쉽게 떨어져 나가 Na^+가 되고, 메탄올의 O-H 결합 중 수소는 부분적인 양전하를 띠므로 전자를 쉽게 얻어 수소 기체가 발생하고 메탄올은 CH_3O^- 이온을 생성한다.

(3) 물이 없는 조건에서 반응이 일어나므로 아레니우스 산은 될 수 없고, H^+를 낼 수 있는 물질이 없으므로 브뢴스테드-로우리 산도 없다. 생성물인 Na^+와 CH_3O^- 중에서 산으로 작용하는 물질은 Na^+이다. 극성 분자인 메탄올의 비공유 전자쌍이 양전하를 갖는 Na^+와 상호작용하므로 Na^+는 루이스 산으로 작용한다.

생명 과학

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)
진핵세포는 모양과 크기가 같은 상동 염색체를 쌍으로 갖고 있으며, 이와 같은 세포를 이배체(2n) 세포라고 한다. DNA는 세포주기의 간기에 복제되어 분열기 동안에는 자매 염색 분체 형태로 존재한다. 이배체의 생식 모세포는 감수 1분열과 감수 2분열을 통해서 반수체(n)인 생식 세포를 만든다. 감수 분열 동안 염색체 비분리 현상이 일어나면 생식 세포의 염색체 수에 이상이 생긴다. 드물기는 하지만 모든 상동 염색체가 분리되지 않아서 사배체(4n)의 식물이 생기기도 한다. 육종 학자들은 이를 활용하여 새로운 품종을 개발한다.

(나)
서로 다른 대립 형질을 쌍으로 갖는 순종 간에 교배가 일어나면 잡종 1대에서 부모 중 한쪽의 형질만 나타난다. 이때 표현되는 대립 형질을 우성, 그렇지 않은 것을 열성이라고 한다. 이 잡종 1대를 자가 수분시켜 얻은 잡종 2대에서는 우성 대립 형질과 열성 대립 형질을 나타내는 자손의 비율이 약 3:1이다. 멘델은 이와 같은 결과를 해석하기 위해서 우성과 열성 현상을 포함해서 분리의 법칙을 제안하였다. 즉, 대립 유전인자는 쌍을 이루고 있고, 이 대립 유전인자 쌍은 생식 세포가 만들어 질 때 분리되어 각각 다른 세포로 들어간다는 것이다. 멘델의 분리의 법칙으로 유전 현상이 잘 설명되는 이유는 대립 유전인자가 실제로 상동 염색체에 존재하고, 이 상동 염색체 쌍이 감수 분열 동안 각각의 생식 세포로 분리되기 때문이다

(다)
하나의 염색체에는 많은 수의 유전자가 있다. 각 염색체에 있는 유전자들은 연관되어 있으며, 이들은 하나의 연관군을 이룬다. 연관군의 수는 생식 세포의 염색체 수와 같으므로 사람이 가지고 있는 유전자 연관군은 23개이다. 생식 세포가 만들어 질 때 연관 유전자들은 함께 행동하기 때문에 멘델의 독립의 법칙을 따르지 않는다. 그러나 연관 유전자 간의 연관이 깨지는 경우도 빈번하게 발생한다. 이것은 상동 염색체가 분리되기 전에 염색체의 특정 위치에서 교차가 일어나기 때문이다. 교차의 발생 빈도는 염색체 상에서의 두 유전자 간의 거리에 비례한다. 이런 연관과 교차의 특성 때문에 동일한 염색체에 있는 대부분의 유전 형질은 함께 유전되지만, 어떤 유전 형질들은 독립적으로 유전되는 경향이 있다.

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】
(1) 이배체인 생식 모세포의 감수 1분열이 끝나서 만들어진 딸세포의 핵상은 n이 된다. 이어서 감수 2분열이 완료되고 생식 세포가 만들어지는데, 이들의 핵상도 여전히 n이다. 그 이유를 설명하시오. (10점)
(2) 하나의 생식 모세포로부터 만들어진 4개의 생식 세포 중 2 개의 세포에서 염색체 수에 이상이 생겼다. 그 이유를 설명하시오. (10점)

【1-2】
육종 학자가 유전자 R과 r을 가진 이배체의 완두로부터 사배체의 완두를 만들었다. 아래의 <자료>는 이 사배체 완두에 대한 설명이다.

<자료>

㉠ R은 완두 씨의 모양을 둥글게 하는 유전 형질, r은 주름지게 하는 유전 형질이다.
㉡ R과 r의 유전은 멘델의 법칙을 따른다.
㉢ R은 r에 대해 완전 우성이다.
㉣ 감수 분열 과정에서 상동 염색체가 4분 염색체를 형성하는 경우는 세 가지가 있다.
㉤ 이배체와 사배체의 생식 세포가 가진 유전자형의 비는 서로 다르다.

(1) 사배체 완두가 만드는 생식 세포의 유전자형 종류와 그 비를 구하고(10점), 풀이 과정을 설명하시오(10점).
(2) 사배체 완두에서 열린 완두콩의 유전자형 종류와 그 비를 구하고(5점), 풀이 과정을 설명하시오(10점).
(3) 사배체 완두에서 열린 완두콩의 표현형 종류와 그 비를 구하시오. (5점)

【1-3】
완두가 가진 유전 형질의 특성을 알아보기 위해 AABBCCDD와 aabbccdd를 교배하여 잡종 1대를 얻었다. 이 잡종 1대를 자가 수분시켜 자손 2대를 얻었다. 다음 표는 자손 2대의 표현형과 개체수를 정리한 것이다. A, B, C, D는 a, b, c, d에 대해 각각 완전 우성이다.

표현형	개체수	표현형	개체수	표현형	개체수
A_B_	1,050	A_C_	1,408	A_D_	1,541
A_bb	345	A_cc	0	A_dd	115
aaB_	352	aaC_	0	aaD_	110
aabb	120	aacc	260	aadd	510

(1) A와 B의 연관성을 결정하고, 그 이유를 설명하시오. (20점)

(2) 염색체 상에서의 A와 C, D 간의 상대적인 거리를 설명하시오. (20점)

● 관련 교과서 내용
☞ 고등학교 교과서『생명과학Ⅰ』(비상교육) II. 세포와 생명의 연속성 1. 세포와 세포분열 2. 유전
☞ 고등학교 교과서『생물Ⅰ』(지학사) VIII. 유전 1. 염색체와 유전자 2. 사람의 유전 형질
☞ 고등학교 교과서『생명과학Ⅰ』(A^{+}중앙교육) VIII. 유전 1. 염색체와 유전자 2. 사람의 유전

● 출제 배경
생식은 유전물질을 다음 세대의 생명체로 전달해서 생명의 연속성을 가능하게 하는 과정이며, 이것은 세포 분열을 통해서 일어난다. 생명과학Ⅰ교과 과정은 이 과정에 관계된 핵심 개념 및 사건들을 여러 가지 생물체를 대상으로 학습하게 하고 있다. 현재 고등학교 교과과정은 염색체와 체세포분열 및 감수분열의 관계, 감수분열과 멘델의 유전 법칙의 관계 등 을 다루고 있다. 본 문항은 기본적인 학습능력과 기초적인 논리적 추론 및 분석 능력을 갖춘 학생이라면 이들의 관계를 설명한 제시문을 활용하여 풀이할 수 있도록 구성하였다.

● 문항 해설
【1-1】이 문제는 염색체와 감수 분열에 대한 기본적인 정보를 주고, 감수분열에서의 염색체 행동 방식이 생식세포를 만드는데 있어서 어떤 의미와 중요성을 갖는지를 추론할 수 있는지와 이를 학생 본인의 언어로 정확하게 표현할 수 있는지를 확인하고자 한다. 핵상의 의미뿐만 아니라 상동 염색체와 자매염색분체를 구별할 수 있어야 한다.

【1-2】이 문제는 멘델의 분리의 법칙에 깔려 있는 전제 조건과 실제 감수분열 시 나타나는 염색체의 행동 간의 관계를 파악할 수 있는지와 이를 정확하게 표현할 수 있는지를 확인하고자 하였다. 이 관계를 이해하고 있다면 이배체에서 일어나는 감수분열이나 멘델의 법칙을 사배체

에도 적용할 수 있어야 한다. 감수 1분열의 전기에 상동 염색체가 쌍을 이루는 의미를 이해하고, 생식세포가 최종적으로 물려받는 염색체가 무엇인지를 파악해야 한다. 또한 완전 우성의 의미를 이해한다면 다양한 조합의 유전자형을 갖는 사배체의 표현형을 추론할 수 있어야 한다.

【1-3】이 문제는 제시문에 주어진 멘델의 독립의 법칙과 이 법칙의 중요성을 이해하는지를 확인하기 위해서 서로 다른 형질들 간의 교배 결과를 분석하여 추론하게 하였다. 잡종 2대의 표현형의 비로부터 독립의 법칙과 연관을 파악할 수 있어야 한다. 또한 연관된 유전자 간에 일어나는 교차로부터 동일한 염색체에 존재하는 두 유전형질 간의 거리에 대해서 추론할 수 있어야 한다.

● **답안 예시**

생명 과학

【1-1】
(1) 감수 1분열에서는 상동 염색체 쌍이 분리되기 때문에 핵상이 2n에서 n으로 감소한다. 감수 2분열에서는 S기의 DNA 복제 결과물인 자매염색분체가 분리되는 과정이기 때문에 염색체의 수는 반으로 줄더라도 더 이상의 핵상 변화는 없다.

(2) 감수 2분열을 시작한 두 세포 중 한 세포에서만 염색체 비분리가 일어나면 만들어지는 4개의 생식 세포 중에서 2개는 정상적인 염색체 수를, 나머지 2개는 비정상적인 염색체 수를 갖는다.

【1-2】
(1) 사배체 완두가 갖고 있는 2쌍의 상동 염색체가 감수 1분열기에서 4분체를 형성하는 경우의 수는 3가지다.

경우 1: [RR-RR 쌍, rr-rr 쌍], 경우 2: [RR-rr 쌍, RR-rr 쌍), 경우 3: [RR-rr 쌍, rr-RR 쌍].

감수 분열이 완료되면 생식 세포는 다음과 같은 유전형과 비를 갖는다.

RR : Rr : rr = 2: 8: 2 = 1 : 4 : 1

(2) (1)의 생식 세포가 무작위로 교배하여 자손을 만들면 다음 표와 같은 유전자형과 빈도가 나온다.

생식세포	RR	4Rr	rr
RR	RRRR	4RRRr	RRrr
4Rr	4RRRr	16RRrr	4Rrrr
rr	RRrr	4Rrrr	rrrr

따라서 완두콩의 유전자형과 비는 다음과 같다. RRRR: RRRr : RRrr : Rrrr : rrrr = 1 : 8 : 18 : 8 : 1

(3) (2)의 표로부터 다음과 같은 유전형질과 비가 나온다. 둥근 형질(R) : 주름진 형질(r) = 35 : 1

【1-3】
(1) 자손 2대에서 A와 B의 표현형이 [9 : 3 : 3 : 1]의 비로 나온다.
이 비는 두 유전형질이 독립적으로 분리되며, 서로 다른 염색체에 있음을 의미한다.

하지만 [9 : 3 : 3 : 1]의 비가 나온다하더라도 두 유전형질이 반드시 서로 다른 염색체에 있다고 단정할 수 없다.
왜냐하면 동일한 염색체에 있는 두 유전형질이라 하더라도 서로 충분히 멀리 떨어져 있는 경우에는 [9 : 3 : 3 : 1]에 근접하는 비가 나타날 수 있기 때문이다.

(2) 자손 2대에서 A와 C, A와 D의 표현형의 분리가 [9 : 3 : 3 : 1]의 비로 나타나지 않았다([3 : 1]이었다).
따라서 A와 C, A와 D는 각각 서로 연관되어 있음을 의미하고, A, B, C는 모두 동일한 염색체에 위치함을 의미한다.

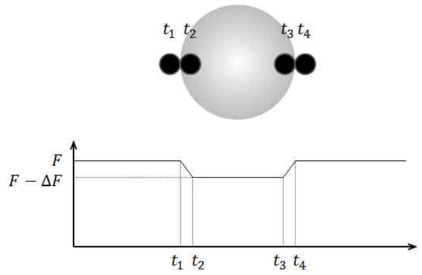
A와 C의 경우에는 교차형(재조합형)이 전혀 나타나지 않았고, A와 D의 경우에는 교차형(조합형)이 상당수 나타났다.
따라서 염색체 상에서 C는 A에 매우 근접해 있으며, D는 A에 대해서 C보다 더 멀리 떨어져 있다.

지구 과학

[1] 아래 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

케플러 우주 망원경은 행성이 항성 앞을 지나갈 때 일으키는 식 현상을 관측함으로써 1,000개가 넘는 외계 행성을 발견하였다. 행성은 가시광선을 거의 내지 않으므로 [그림 1]과 같이 행성이 관측자와 항성 사이에 위치하게 되면 항성의 밝기가 감소한다. 밝기 F가 ΔF 만큼 감소했을 때 밝기 감소율 $\frac{\Delta F}{F}$는 (행성의 면적)/(항성의 면적)으로 표현할 수 있다. 구형 천체의 표면적이 (반지름)^{2}에 비례한다는 점을 고려하면, 행성의 크기가 클수록 항성의 밝기 변화 정도가 커질 것이라고 유추할 수 있다.



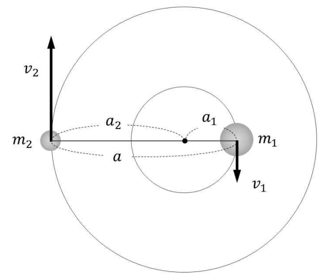
[그림 1]

(나)

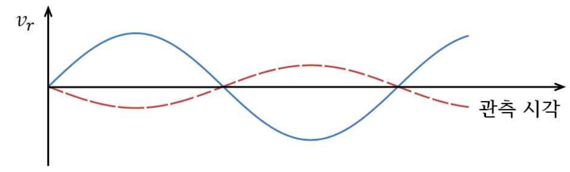
가장 널리 사용되는 외계 행성 탐색 방식은 별빛의 도플러 효과를 이용하는 것이다. 별이 행성을 거느리고 있다면 별과 행성은 질량 중심을 중심으로 공전하게 된다. 이때 별은 지구로부터 주기적으로 멀어졌다 가까워지기 때문에 도플러 효과에 의한 별빛의 파장 편이량이 나타난다. 따라서 별 스펙트럼에서 흡수선을 분석하면 외계 행성의 존재를 확인할 수 있다.

(다)

[그림 2]와 같이 질량이 m_1인 천체와 m_2인 천체가 질량 중심을 중심으로 각각 원운동한다고 생각하자. 두 천체가 질량 중심에서 각각 a_1과 a_2 떨어진 거리에서 v_1과 v_2의 속도로 원운동한다면 주기 P는 케플러 제 3법칙으로부터 $P^2 \propto a^3$임을 알 수 있다. 여기에서 두 천체 사이의 거리 a는 $a = a_1 + a_2$이다. 공전 주기 P는 두 천체의 공전 속도 v_1과 v_2에 대해 $v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$와 $v_2 = \frac{2\pi a_2}{P}$의 관계를 만족한다. 그러므로 질량 중심의 성질인 $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$에서 $\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}$의 관계가 성립함을 알 수 있다. [그림 3]은 두 천체가 질량 중심을 중심으로 원운동할 때, 도플러 효과를 이용하여 관측할 수 있는 시선 속도 곡선이다. 도플러 효과 공식에 따르면, 시선 속도와 분광선 파장과의 관계는 $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$을 만족한다. 여기에서 λ_0는 방출된 파장, λ는 관측된 파장, v_r은 천체의 시선 속도, c는 빛의 속도이다.



[그림 2]



[그림 3]

※ 모든 물음에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

(가)에 근거하여 행성의 항성식으로 인한 밝기 감소율 $\frac{\Delta F}{F}$를 항성의 반지름 R_S와 행성의 반지름 R_P를 포함한 식으로 나타내시오. (30점)

【1-2】

두 천체가 질량 차이가 상당한 ($m_1 \gg m_2$) 별과 행성이라고 가정할 때, (다)에 근거하여 행성의 공전 속도 v_2와 행성의 공전 궤도 반지름 a_2의 관계식을 유도하고 설명하시오. (30점)

【1-3】

(가)와 (나)에 의하면 관측되는 항성의 밝기 감소율이 클수록, 흡수선의 편이량이 클수록 외계 행성을 발견할 확률이 커진다고 할 수 있다.

(1) 항성의 밝기 감소율이 크게 나타날 조건을 (가)에 근거하여 설명하시오. (20점)

(2) 흡수선의 편이량이 크게 나타날 조건을 (다)에 근거하여 설명하시오. (20점)

● **관련 교과서 내용**

☞ 고등학교 교과서『지구 과학Ⅰ』(천재교육) Ⅳ. 다가오는 우주 2. 우주 탐사

☞ 고등학교 교과서『지구 과학Ⅰ』(교학사) Ⅳ. 다가오는 우주 2. 우주 탐사

● **출제 배경**

케플러의 행성 궤도 법칙은 지구 과학Ⅰ 교과 천문학 분야의 핵심 개념 중 하나로, 태양계 천체들의 관측된 움직임을 물리학적으로 풀어 나가는 과정을 학습함으로써 천체물리학의 기초를 접하게 되는 것이 교육 과정 상의 목표이다. 아울러 다른 항성 주위의 외계 행성 탐색 및 외계 행성계 연구는 최근 가장 많은 관심을 받고 있는 천문학 연구 분야이며, 현재 고등학교 지구 과학Ⅰ 교육 과정에서는 식 현상, 도플러 효과, 미세중력렌즈 등 외계 행성 탐색의 기본적인 원리를 소개하고 있다. 본 문항에서는 이와 같은 교육 과정을 정상적으로 마친 학생이 제시문에 주어진 내용을 활용하여 논리적 사고를 통해 외계 행성 탐색 과정에서 이끌어 낼 수 있는 행성의 물리량에 대한 문제를 해결할 능력이 있는지를 평가하고자 하였다. 제시문 대부분의 내용은『지구 과학Ⅰ』교과서에서 다루고 있는 내용이며 제시문에 구체적인 설명을 기재하여 응용력이 있는 학생이라면 충분히 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다.

- **문항 해설**

【1-1】 이 문제에서는 주어진 제시문에서 행성의 항성식으로 인한 밝기 감소율 $\frac{\Delta F}{F}$에 대한 정보를 추론하고 이를 수식으로 표현할 수 있는지를 묻고 있다. 관측자의 시선 방향에 행성의 공전궤도면이 위치할 때 행성의 면적만큼이 항성을 가려 항성의 광도가 감소한다. 행성의 크기가 클수록 광도가 줄어드는 정도가 크다.

【1-2】 이 문제에서는 분광쌍성과 케플러 법칙에 관한 제시문에서 질량 중심을 중심으로 회전하는 항성과 행성의 회전 속도 정보를 표현하는 수식을 유도할 수 있는지 묻고 있다. 한 천체의 질량이 다른 천체의 질량에 비해 상당히 클 경우 $a_2 \gg a_1$ 이므로 $v_2 \propto \frac{a_2}{(a_1+a_2)^{3/2}}$에서

$v_2 \propto \frac{a_2}{a_2^{3/2}} \propto a_2^{-1/2}$이 유도된다. 따라서 별로부터 멀어질수록 행성의 공전 속도는 느려진다고 할 수 있다.

【1-3】 이 문제에서는 주어진 제시문으로부터 행성을 발견할 조건에 대한 정보를 해석할 수 있는지 묻고 있다. 제시문에 의하면 외계행성을 발견할 확률이 크기 위해서는 항성의 밝기 감소율이 크거나 흡수선의 편이량이 커야한다. 밝기 감소율이 크려면 행성의 반지름이 커야 한다. 흡수선의 편이량이 크기 위해서는 행성의 질량이 크거나 공전 궤도 장반경이 작아야 한다.

- **답안 예시**

지구 과학
【1-1】 $\frac{\Delta F}{F} = \frac{R_P^2}{R_S^2}$ $\frac{\Delta F}{F} = \frac{(\text{행성의 면적})}{(\text{항성의 면적})} = \frac{kR_P^2}{kR_S^2} = \frac{R_P^2}{R_S^2}$ 와 같이, 밝기 감소율은 행성의 반지름을 항성의 반지름으로 나눈 값의 제곱에 비례한다. 【1-2】 $m_1 \gg m_2$ 이므로 $a_2 \gg a_1$이다. $v_2 \propto \frac{a_2}{(a_1+a_2)^{3/2}}$이므로 $v_2 \propto \frac{a_2}{a_2^{3/2}} \propto a_2^{-1/2}$이다. 따라서, 별로부터 멀어질수록 행성의 공전 속도는 느려진다. 【1-3】 (1) 밝기 감소율 $\frac{\Delta F}{F}$는 $\frac{\Delta F}{F} = \frac{R_P^2}{R_S^2}$ 로 나타나므로, 행성의 반지름이(크기가) 클수록 밝기 감소율이 크다. (2) 흡수선의 편이량이 크려면 우선 v_r이 커야 한다. v_r이 크려면 우선 공전 궤도 장반경이 작아야 한다. 또한 공전 궤도 장반경이 일정한 경우, 행성의 질량, 즉, m_2가 크면 $\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}$에 의해 별의 속도 v_1이 커져 v_r이 크다.