2020학년도 모의논술고사[자연계-수학]

1. 2020학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I-1]

(1) 점 A, B의 좌표를 각각 (a, a^2), $(a+h, (a+h)^2)$이라 두면 $(h>0)$, 점 A, B의 x축 위의 수선의 발 A', B'는 $(a, 0)$, $(a+h, 0)$이 된다. 제시문 [마]를 이용하여 구하고자 하는 영역의 넓이 S를 구하면

$$S = (\text{사다리꼴 } ABB'A' \text{의 넓이}) - \int_a^{a+h} x^2\,dx$$

가 된다.

$$(\text{사다리꼴 } ABB'A' \text{의 넓이}) = \frac{\{a^2+(a+h)^2\}h}{2} = a^2h + ah^2 + \frac{h^3}{2},$$

$$\int_a^{a+h} x^2\,dx = \frac{1}{3}\{(a+h)^3 - a^3\} = \frac{h^3}{3} + a^2h + ah^2$$

이므로, $S = \dfrac{h^3}{6}$이다.

(2) 점 B의 좌표를 $(a+h, (a+h)^2)$라 두면 $(h>0)$, $\overline{AB}^2 = \dfrac{25a^4}{16} + \dfrac{a^2}{4}$ 이므로,

$$h^4 + 4ah^3 + (4a^2+1)h^2 - \frac{25a^4}{16} - \frac{a^2}{4} = h^4 + 4ah^3 + (4a^2+1)h^2 - \frac{a^2}{4}\left(\frac{25a^2}{4}+1\right) = 0$$

이 된다. $P(h) = h^4 + 4ah^3 + (4a^2+1)h^2 - \dfrac{a^2}{4}\left(\dfrac{25a^2}{4}+1\right)$라 두면, $P(\dfrac{a}{2}) = 0$이므로, 제시문 [바]에 의해 다항식 P는 $x - \dfrac{a}{2}$로 나누어떨어지고

$$P(h) = \left(h - \frac{a}{2}\right)\left\{h^3 + \frac{9a}{2}h^2 + \left(\frac{25a^2}{4}+1\right)h + \frac{a}{2}\left(\frac{25a^2}{4}+1\right)\right\}$$

이 된다. a와 h는 양수 이므로 $h = \dfrac{a}{2}$일 때만 $\overline{AB} = \sqrt{\dfrac{25a^4}{16} + \dfrac{a^2}{4}}$ 을 만족한다. 따라서, (1)번에 의해 선분 AB와 곡선 $y = x^2$으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\dfrac{a^3}{48}$이다.

[논제 I-2]

(1) 제시문 [나] 에 의해 $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)x^{-\frac{1}{n}}$이다. 점 $P(1,1)$에서 $y = f(x)$, $y = g(x)$에 접하는 접선을 각각 l_1, l_2라 하면, 제시문 [가]에 의해

$$l_1 : y-1=n(x-1), \quad l_2 : y-1=\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-1)$$

이다. l_1이 x축과 만나는 점 $A_n(a_n, 0)$의 x좌표는 $a_n=1-\frac{1}{n}$, l_2가 y축과 만나는 점 $B_n(0, b_n)$의 y좌표는 $b_n=\frac{1}{n}$이다.

(사각형 OA_nPB_n의 넓이) = (삼각형 OA_nP의 넓이) + (삼각형 OPB_n의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$$

이므로 n과 상관없이 일정하다. 따라서

(삼각형 A_nPB_n의 넓이) = (사각형 OA_nPB_n의 넓이) − (삼각형 OA_nB_n의 넓이)

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\overline{OB_n} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{n^2-n+1}{2n^2}$$

이다. $G(n)=\frac{n^2-n+1}{2n^2}$이라 하면 $G'(n)=\frac{n(n-2)}{2n^4}$이고 $n>1$의 범위에서 $n=2$일 때 극값을 가진다. $1<n<2$일 때 $G'(n)<0$ 이고 $n>2$일 때 $G'(n)>0$ 이므로, 제시문 [다]에 의해 $G(n)$은 $1<n<2$에서 감소함수이고, $n>2$에서 증가함수이다. 따라서 $n=2$ 일 때 $G(n)$은 최솟값 $G(2)=\frac{3}{8}$을 가지며, 삼각형 A_nPB_n의 넓이는 $n=2$일 때 최솟값 $\frac{3}{8}$을 가진다.

(2) x축 위의 점 $A(1,0)$과 y축 위의 점 $B(0,1)$에 대하여, 각 A_nPA를 α, 각 BPB_n을 β라 하면, $\theta=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$이므로 $\alpha+\beta$가 최대일 때 θ가 최소가 된다.

삼각형 A_nPA는 $\overline{AP}=1$ 이고 $\overline{A_nA}=\overline{OA}-\overline{OA_n}=1-(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$이며 각 $A_nAP=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 $\tan\alpha=\frac{1}{n}$이다. 또한 삼각형 BPB_n은 $\overline{BP}=1$ 이고 $\overline{BB_n}=\overline{OB}-\overline{OB_n}=1-\frac{1}{n}$이며 각 $B_nBP=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 $\tan\beta=1-\frac{1}{n}$이다.

제시문 [라]에 의해 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{n^2}{n^2-n+1}$이고,

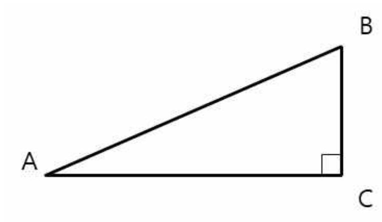
$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-(\alpha+\beta)\right)=\frac{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-(\alpha+\beta)\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-(\alpha+\beta)\right)}$$ 이며,

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-(\alpha+\beta)\right)=\frac{1-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$이다.

$H(n)=\dfrac{n^2-n+1}{n^2}$이라 하면 $H'(n)=\dfrac{n(n-2)}{n^4}$이고 $n>1$의 범위에서 $n=2$일 때 극값을 가진다. $1<n<2$에서 $H'(n)<0$ 이고, $n>2$에서 $H'(n)>0$ 이므로, 제시문 [다]에 의해 $H(n)$은 $1<n<2$에서 감소함수이고 $n>2$에서 증가함수이다. 따라서 $n=2$일 때 $H(n)$는 최솟값 $H(2)=\dfrac{3}{4}$를 가진다.

한편 $\tan x$ 함수는 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 증가함수이므로, $\tan\theta$가 최소일 때 θ도 최소이다. 따라서 $n=2$일 때 θ는 최소이며, 이때 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ 이다.

* $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$에 대한 별해



위의 직각삼각형에서 각ABC 를 $\alpha+\beta$ 라 하면 각CAB 는 $\boldsymbol{\theta}=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$가 된다.

또한 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}}=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$ 이다.

2. 2020학년도 모의논술고사채점 기준

[논제 I-1]

(1) <6점> A의 x좌표를 미지수 a로 두고, 구하고자 하는 영역의 넓이를 사다리꼴의 넓이와 제시문 [마]를 이용하여 표현한다.

<4점> 사다리꼴의 넓이와 정적분을 계산하여 넓이를 구한다.

(2) <5점> A와 B의 x좌표의 차를 미지수 h로 두고 방정식을 구한다.

<5점> 제시문 [바]를 이용하여 미지수 h에 대해 인수분해하여 방정식의 해를 구한다.

<5점> (1)번을 이용하여 구하고자하는 영역의 넓이를 구한다.

[논제 I-2]

(1) <5점> 제시문 [가] 와 [나]를 이용하여 접선의 방정식을 구하고 a_n 과 b_n을 n에 관한 식으로 표현한다.

<5점> 삼각형A_nPB_n의 넓이를 n에 관한 함수로 표현한다.

<5점> 제시문 [다]를 이용하여 삼각형A_nPB_n의 넓이의 증가 및 감소 구간을 명시하고, $n=2$일 때 최솟값을 구한다.

(2) <10점> 직각삼각형과 탄젠트 함수의 성질(제시문 [라])을 이용하여 각 θ의 탄젠트 값을 n에 관한 함수로 표현한다.

<5점> 제시문 [다]를 이용하여 각 θ의 탄젠트 값이 증가 및 감소 구간을 명시하고, $n=2$일 때 최솟값을 구한다.

<5점> 제시문 [라]에서 탄젠트 함수가 증가함수임에 기반 하여 각 θ의 탄젠트 값이 최소일 때 θ도 최소임을 밝힌다.

3. 2020학년도 모의논술고사문항 해설

수학 논제는 고등학교 수학 교육과정에서 학습하는 기본 개념들을 종합적으로 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

논제 I-1 에서는 논제에서 주어진 상황을 그래프를 통해 이해하고 논리적으로 해결할 수 있는가를 물어보고 있다. 고교과정에서 다루는 정적분을 이용하여 주어진 영역의 넓이를 논리적으로 제시할 수 있는 능력과 논제에서 주어진 상황을 미지수를 이용하여 방정식을 만들고, 이 방정식을 풀 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 논제 I-2에서는 거듭제곱함수와 그 그래프에 접하는 접선의 방정식이 이루는 도형의 넓이와 각에 대한 기본적인 성질과 미분법 및 삼각함수의 활용을 통한 그 응용을 물어보고 있다. 단편적인 지식보다는 수학 교육과정에서 학습한 내용에 대한 전반적인 이해를 바탕으로 논제를 해결하고 그 방법을 논술하도록 하였다.