

# 2020학년도 모의논술고사 [의학계-수학]

## 1. 2020학년도 모의논술고사 예시답안

[문제 I-1] 원의 방정식에서  $a=0$  이고  $b=c \geq 0$  이면  $x^2+(y-b)^2=b^2$  을 얻고, 포물선의 방정식은  $y=x^2$  이다. 두 곡선이 만나는 점은  $x^2+(x^2-b)^2=b^2$  을 만족한다. 이 식을 다음과 같이 정리하면,

$$x^2(x^2+1-2b)=0$$

방정식의 근은  $1-2b \geq 0$  일 때  $x=0$  으로 하나임을 알 수 있다. 따라서 원과 포물선이 한 점에서 만나게 되는  $b$  의 범위는  $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$  가 된다. 함수  $f(b)$  는 반지름이  $b$  인 원의 넓이이므로  $f(b)=\pi b^2$  이고, 범위  $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$  에서  $f(b)$  의 최댓값은  $\frac{\pi}{4}$  이다.

[문제 I-2] 원  $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$  에 대해서  $\frac{dy}{dx}$  는 음함수의 미분법에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$$

포물선  $y=x^2$  에 대해서는  $\frac{dy}{dx}=2x$  이므로 점  $R(r, r^2)$  에서 접선의 기울기는  $2r$  이다. 점  $R$  에서 원의 접선과 포물선의 접선이 일치하므로  $-\frac{r-a}{r^2-b}=2r$  을 얻는다. 이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$b = -\frac{a}{2r} + r^2 + \frac{1}{2}$$

[문제 I-3] 원의 반지름은 선분  $\overline{AR}$  의 길이이다. 앞에서 구한  $a$  와  $b$  의 관계식을 이용해서 선분  $\overline{AR}$  의 길이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\overline{AR} = \sqrt{(r-a)^2 + \left(r^2 + \frac{a}{2r} - r^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = |r-a| \sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}$$

따라서 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2 + \left(y + \frac{a}{2r} - r^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = (r-a)^2 \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right)$$

원과 포물선이 만나는 점은 다음 식을 만족한다.

$$(x-a)^2 + \left(x^2 + \frac{a}{2r} - r^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = (r-a)^2 \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right)$$

이를 정리하면 다음과 같다.

$$x^4 + \left(\frac{a}{r} - 2r^2\right)x^2 - 2ax + r^4 + ar = 0$$

원과 포물선이 점 R 에서 만난다는 사실을 이용하면 위 식을 다음과 같이 인수분해 할 수 있다.

$$(x-r)^2 \left( x^2 + 2rx + \left( r^2 + \frac{a}{r} \right) \right) = 0$$

방정식  $x^2 + 2rx + \left( r^2 + \frac{a}{r} \right) = 0$  은 판별식  $D = -\frac{a}{r}$  의 부호에 따라 근의 개수가 달라지는데, 문제

의 조건에 의해  $D > 0$  이다. 따라서 위의 사차방정식은 최대 세 개의 근  $r$ (중근),  $-r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$ ,  $-r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  을 가진다. 문제의 조건에 의해  $\sqrt{-\frac{a}{r}} \neq 0$  이므로,  $-r + \sqrt{-\frac{a}{r}} \neq -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  이다.

따라서 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우는  $r = -r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$  또는  $r = -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인 경우이다. 두 식을 정리하면 모두  $a = -4r^3$  가 된다. 앞에서 구한 원의 방정식에  $a = -4r^3$  을 대입하면

$$(x + 4r^3)^2 + \left( y - 3r^2 - \frac{1}{2} \right)^2 = (r + 4r^3)^2 \left( 1 + \frac{1}{4r^2} \right)$$

를 얻고, 따라서 원의 넓이는 다음과 같다.

$$g(r) = \pi (r + 4r^3)^2 \left( 1 + \frac{1}{4r^2} \right) = \frac{\pi}{4} (1 + 4r^2)^3$$

[문제 I-4] [문제 I-3]에서 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우 세 점 P, A, R 의 위치에 대해서 생각하자. 우선, 점 R 의 좌표는  $(r, r^2)$  이다. 점 A 의 좌표는  $(a, b)$  인데,  $a = -4r^3$  이고

$b = -\frac{a}{2r} + r^2 + \frac{1}{2}$  이므로,  $A \left( -4r^3, 3r^2 + \frac{1}{2} \right)$  을 얻는다. 점 P 의 좌표에 대해서 생각해보자. 먼저,

$r = -r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인 경우  $r > 0$  이고, 점 P 의  $x$  좌표는  $-r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인데,  $a = -4r^3$  이므로

$-r - \sqrt{4r^2} = -3r$  이 된다. 마찬가지로  $r = -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인 경우  $r < 0$  이고, 점 P 의  $x$  좌표는

$-r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인데,  $a = -4r^3$  이므로  $-r + \sqrt{4r^2} = -r + 2|r| = -3r$  이 된다. 따라서 두 경우 모두

$-3r$  을 얻고, 점 P 가 포물선 위에 있다는 사실을 이용하여  $P(-3r, 9r^2)$  을 얻는다. 세 점의 좌표를 이용하여 선분  $\overline{PA}$ ,  $\overline{AR}$ ,  $\overline{PR}$  의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{PA}^2 = \overline{AR}^2 = \frac{1}{4}(1 + 4r^2)^3, \quad \overline{PR}^2 = 16r^2(1 + 4r^2)$$

삼각형 PAR 은 이등변삼각형이므로  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{PR}}{\overline{PA}}$  이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{4r}{1 + 4r^2}$$

극한  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sin \frac{\theta}{2} = 0$  이고  $0 \leq \theta \leq \pi$  이므로,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta = 0$  이다. 극한  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\theta = \lim_{r \rightarrow \infty} 2r \sin \frac{\theta}{2} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2r \sin \frac{\theta}{2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{8r^2}{1 + 4r^2} = 2$$

## 2. 2020학년도 모의논술고사채점 기준

[문제 I-1]

[2점]  $a=0$  이고  $b=c \geq 0$  인 경우의 원의 방정식  $x^2 + (y-b)^2 = b^2$  을 구한다.

[4점] 원과 포물선이 만난다는 조건을 이용하여 사차방정식  $x^2(x^2 + 1 - 2b) = 0$  을 유도한다.

[4점] 이차방정식  $x^2 + 1 - 2b = 0$  의 판별식을 이용하여  $b$  의 범위를 찾는다.

[문제 I-2]

[4점] 음함수의 미분법을 이용하여  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$  를 유도한다.

[2점] 접선의 기울기가  $2r$  임을 보인다.

[4점] 점 R 에서 원과 포물선이 만난다는 사실을 이용하여 관계식  $-\frac{r-a}{r^2-b} = 2r$  을 유도한다.

[문제 I-3]

[4점] 앞에서 구한  $a$  와  $b$  의 관계식을 이용하여 원의 반지름이  $|r-a|\sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}$  임을 보인다.

[4점] 원과 포물선이 만난다는 조건을 이용하여 사차방정식  $x^4 + \left(\frac{a}{r} - 2r^2\right)x^2 - 2ax + r^4 + ar = 0$  을 유도한다.

[4점] 원과 포물선이 점 R 에서 만난다는 사실을 이용하여 위 사차방정식을 인수분해한다.

[4점] 판별식  $D = -\frac{a}{r}$  이 양수임을 확인하고  $a$  의 범위에 따라 최대 세 개의 근을 가질 수 있음을 보인다.

[4점] 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우는  $r = -r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$  또는  $r = -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인 경우임을 확인하고, 두 경우 모두  $a = -4r^3$  임을 보인다.

[문제 I-4]

[5점] 원의 중심 A 의 좌표가  $A\left(-4r^3, 3r^2 + \frac{1}{2}\right)$  임을 보인다.

[5점] 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우인  $r = -r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인 경우와  $r = -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$  인 경우 모두 점 P 의  $x$  좌표가  $-3r$  이 됨을 보인다.

[5점] 선분  $\overline{PA}$ ,  $\overline{AR}$ ,  $\overline{PR}$  의 길이와 각도  $\theta$  사이의 관계  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{4r}{1+4r^2}$  을 유도한다.

[5점] 제시문 [라]와 [마]를 이용하여 극한을 구한다.

### 3. 2020학년도 모의논술고사문항 해설

문제 I-1에서는 두 곡선이 만난다는 조건으로부터 적절한 방정식을 유도하고 이차방정식의 판별식을 이용하여 근의 개수를 결정할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 문제 I-2에서는 곡선의 접선을 이해하고 있는지와 음함수의 미분법을 이해하고 있는지에 대한 능력을 평가하고자 하였다. 문제 I-3에서는 주어진 조건을 이용하여 사차방정식을 인수분해하는 능력을 평가하고자 하였다. 두 곡선이 만나는 점의 위치가 어떻게 나타나는지에 대한 기하학적인 내용을 논리적으로 표현하는 능력을 평가하고자 하였다. 문제 I-4에서는 두 곡선이 만나는 두 점의 위치에 대한 기하학적인 이해를 바탕으로 여러 가지 극한의 성질을 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
수학I	이강섭 외 14인	미래엔	2016	68	제시문 [가]	X
수학I	신항균 외 11인	(주)지학사	2016	36	제시문 [나]	X
미적분I	김원경 외 11인	비상교육	2016	97	제시문 [다]	X
미적분I	황선욱 외 10인	좋은책신사고	2016	60	제시문 [라]	X
미적분II	정상권 외 7인	(주)금성출판사	2016	89	제시문 [마]	X
기하와 벡터	정상권 외 7인	(주)금성출판사	2016	38	제시문 [바]	X