<2019학년도 경희대학교 오프라인 모의논술고사>

출 제 개 요 (자연계-수학)

수학 논제는 고등학교 수학 교육과정에서 학습하는 기본 개념들을 종합적으로 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하기 위하여 입체도형의 겉넓이와 부피, 점과 직선 사이의 거리, 미분법과 함수의 최대, 최소 등의 성질과 응용을 물어보고 있다. 단편적인 지식보다는 수학 교육과정에서 학습한 내용에 대한 전반적인 이해를 바탕으로 논제를 해결하고 그 방법을 논술하도록 하였다.

첫 번째 논제는 한 원뿔이 다른 원뿔의 내부에 포함될 때, 두 원뿔의 높이와 밑면 반지름의 관계식을 유도하고 그로부터 바깥 원뿔의 부피를 최소화하는 조건을 함수의 미분을 통해 논술하도록 하였다.

두 번째 논제는 원뿔에 내접하는 구에 관한 문제로서 구의 반지름, 원뿔의 높이, 밑면 반지름의 관계식을 유도하고 그로부터 바깥 원뿔의 겉넓이를 최소화하는 조건을 함수의 미분을 통해 논술하도록 하였다.

세 번째 논제는 두 번째 논제의 원뿔과 구 사이에 추가할 수 있는 가장 큰 원뿔을 점과 직선 사이의 거리를 통해 해결하는 방법을 논술하도록 하였다.

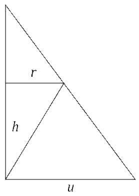
네 번째 논제는 정다각뿔에 내접하는 구에 관한 문제로서 구의 반지름, 각뿔의 높이, 밑면 정다각형의 한 변의 길이의 관계식을 유도하고, 그로부터 바깥 각뿔의 겉넓이를 최소화하는 조건을 함수의 미분을 통해 논술하도록 하였다.

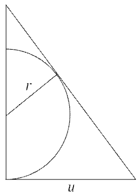
[제시문 출처]

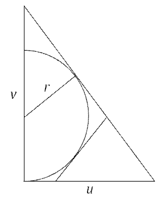
[가] 고등학교 수학 I, 황선욱 외, 좋은책 신사고, 2017, p140,
[가] 고등학교 수학 I, 조도연 외, 경기도 교육청, 2016, p158
[나] 중학교 수학 1, 황선욱 외, 좋은책 신사고, 2017, p 234, p235
[나] 중학교 수학 3, 우정호 외, 동아출판사, 2013, p205
[다] 고등학교 미적분 I , 황선욱 외, 좋은책 신사고, 2017, p119, p125
[다] 고등학교 미적분 I , 신항균 외, 지학사, 2017, p119, p120

2019학년도 오프라인 모의논술고사 예시답안 (자연계)

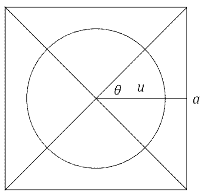
수학

(1) 원뿔 A를 그 회전축을 지나는 평면으로 자른 단면은  이다. 이 직각삼각형의 두 변을 좌표축과 일치시키면 x, y절편이 각각 u, v인 직선 위에 점 (r, h)가 있는 것이므로 $\frac{r}{u}+\frac{h}{v}=1$이고 따라서 $v=\frac{hu}{u-r}$이다. 원뿔 B의 부피는 $V=\frac{\pi u^2 v}{3}=\frac{\pi h}{3}\frac{u^3}{u-r}$이고 $\frac{dV}{du}=\frac{\pi h}{3}\frac{u^2(2u-3r)}{(u-r)^2}$이다. $u>r$의 범위에서 $u=\frac{3}{2}r$일 때 $\frac{dV}{du}=0$이고, $\frac{dV}{du}$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 여기서 V는 극솟값을 갖는다. 주어진 범위에서 유일한 극솟값이므로 이것은 V의 최솟값이다. 따라서 부피가 최소인 원뿔 B의 밑면 반지름은 $u=\frac{3}{2}r$이고 높이는 $v=\frac{hu}{u-r}=3h$이다. 따라서 부피는 $V=\frac{\pi u^2 v}{3}=\frac{9\pi r^2 h}{4}$이다.

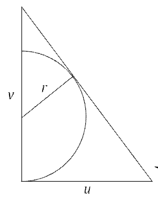
(2) 원뿔 C를 그 회전축을 지나는 평면으로 자른 단면은  이다. 직각삼각형의 닮음에서 $r:(v-r)=u:\sqrt{u^2+v^2}$, 즉 $u(v-r)=r\sqrt{u^2+v^2}$이므로 $\frac{v}{r}=1+\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}$이다. 원뿔의 겉넓이는 밑면의 넓이 πu^2과 옆면을 전개한 부채꼴의 넓이 $\pi u\sqrt{u^2+v^2}$의 합 $S=\pi u^2\left(1+\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}\right)=\frac{\pi}{r}u^2 v$이다. $u=\frac{rv}{\sqrt{v^2-2rv}}$를 대입하면 $S=\frac{\pi r v^2}{v-2r}$이고 $\frac{dS}{dv}=\frac{\pi r v(v-4r)}{(v-2r)^2}$이다. $v>2r$이므로 S는 이 범위에서 $v=4r$ (따라서 $u=\sqrt{2}\,r$) 일 때 유일한 극솟값, 즉 최솟값 $S=8\pi r^2$을 갖는다.

(3) 두 원뿔 C와 D의 평행한 회전축을 지나는 평면으로 자른 단면은 

이다. 이 직각삼각형의 두 변을 좌표축과 일치시키면, 원뿔 C의 모선의 기울기는 (2)의 계산에 의하여 $-2\sqrt{2}$ 이고 따라서 원뿔 D의 나머지 모선의 방정식은 $y=2\sqrt{2}\,x+k$이다. 이 직선은 중심이 $(0,r)$이고 반지름이 r인 원과 접하므로 $k=-2r$, 즉 $y=2\sqrt{2}\,x-2r$이다. 이 직선의 x절편이 $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ 이므로 원뿔 D의 지름은 $\sqrt{2}\,r-\dfrac{r}{\sqrt{2}}=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$, 즉 반지름은 $\dfrac{r}{2\sqrt{2}}$ 이고 따라서 높이는 반지름의 $2\sqrt{2}$ 배인 r이다. 부피는 $V=\dfrac{\pi r^3}{24}$ 이다.

(4) 그림 

은 도형을 정사각뿔의 중심축 방향으로 정사영한 것이고 그림



은 같은 도형을 구와 각뿔 옆면의 한 접점과 중심축을 지나는 평면으로 자른 단면이다. 그림에서 $\theta=\dfrac{2\pi}{n}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{n}$, $a=2u\tan\theta$이고, 직각삼각형의 닮음에서 $u(v-r)=r\sqrt{u^2+v^2}$ 이다. 각뿔의 겉넓이는 밑면 정n각형의 넓이 $\dfrac{n}{2}au=nu^2\tan\theta$와 옆면 이등변 삼각형 n개의 넓이 $\dfrac{n}{2}a\sqrt{u^2+v^2}=nu\sqrt{u^2+v^2}\tan\theta$의 합 $S=nu^2\left(1+\dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}\right)\tan\theta=\dfrac{nu^2v\tan\theta}{r}$ 이다. $u=\dfrac{rv}{\sqrt{v^2-2rv}}$ 를 대입하면 $S=\dfrac{v^2}{v-2r}nr\tan\theta$ 이고, $\dfrac{dS}{dv}=\dfrac{v(v-4r)}{(v-2r)^2}nr\tan\theta$이다. $v>2r$이므로 S는 이 범위에서 $v=4r$ (따라서 $u=\sqrt{2}\,r$이고 $a=2\sqrt{2}\,r\tan\theta$) 일 때 유일한 극솟값, 즉 최솟값 $S=8nr^2\tan\dfrac{\pi}{n}$을 갖는다.

논 술 채 점 기 준 표 (자연계-수학)

[논제 Ⅰ] 수학 (60점 만점)

(사소한 계산 실수는 재량에 따라 감점)

[논제 I-1] 10점 만점

2점: r,h,u,v의 관계식: $\dfrac{r}{u}+\dfrac{h}{v}=1$ 또는 $v=\dfrac{hu}{u-r}$

3점: 원뿔 부피의 정리된 표현: $V=\dfrac{\pi h}{3}\dfrac{u^3}{u-r}$

2점: 부피의 미분과 최솟값 확인: $\dfrac{dV}{du}=\dfrac{\pi h}{3}\dfrac{u^2(2u-3r)}{(u-r)^2}$, 유일한 극솟값

3점: 원뿔의 계산: 반지름 $u=\dfrac{3}{2}r$, 높이 $v=3h$, 부피 $V=\dfrac{9\pi r^2 h}{4}$

[논제 I-2] 15점 만점

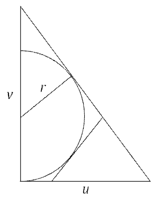
5점: r,u,v의 관계식 $u(v-r)=r\sqrt{u^2+v^2}$ 또는 $\dfrac{v}{r}=1+\dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}$

5점: 원뿔 겉넓이의 정리된 표현: $S=\dfrac{\pi r v^2}{v-2r}$

2점: 겉넓이의 미분과 최솟값 확인: $\dfrac{dS}{dv}=\dfrac{\pi r v(v-4r)}{(v-2r)^2}$, 유일한 극솟값

3점: 원뿔의 계산: 높이 $v=4r$, 반지름 $u=\sqrt{2}\,r$, 겉넓이 $S=8\pi r^2$

[논제 I-3] 15점 만점



5점: 그림 또는 설명에 의한 도형의 완전한 이해

5점: 작은 원뿔 D가 구와 접하기 위한 조건: $y=2\sqrt{2}\,x-2r$

5점: 원뿔 D의 계산: 반지름 $\dfrac{r}{2\sqrt{2}}$, 높이 r, 부피 $V=\dfrac{\pi r^3}{24}$

[논제 I-4] 20점 만점

5점: 정n각형의 중심에서 한 변까지의 거리 u를 도입: $\theta=\dfrac{\pi}{n}$, $a=2u\tan\theta$

5점: r,u,v의 관계식: $u(v-r)=r\sqrt{u^2+v^2}$ 또는 $\dfrac{v}{r}=1+\dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}$

5점: 각뿔 겉넓이의 정리된 표현: $S=\dfrac{v^2}{v-2r}nr\tan\theta$

2점: 겉넓이의 미분과 최솟값 확인: $\dfrac{dS}{dv}=\dfrac{v(v-4r)}{(v-2r)^2}nr\tan\theta$, 유일한 극솟값

3점: 각뿔의 계산: 높이 $v=4r$, 한 변의 길이 $a=2\sqrt{2}\,r\tan\theta$, 겉넓이 $S=8nr^2\tan\dfrac{\pi}{n}$