출제 의도

본 문제는 도형 문제를 좌표계에 구현하고 정적분과 미분을 활용하여 도형의 최대 넓이와 입체도형의 최대 부피를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

I-1. 도형을 좌표 평면에 구현하고 그 넓이를 정적분으로 나타낼 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-2. 적분과 미분의 관계를 이용하여 미분을 구하고 함수의 그래프의 개형을 찾아 함수의 최댓값이 발생되는 점을 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-3. 입체도형의 단면의 넓이의 식을 구하고 이를 이용하여 그 부피를 다항식으로 나타낼 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-4. 다항함수의 그래프의 개형을 찾아 함수의 최댓값을 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 가 제시문 다	교육과정*	**[미적분I] – (라) 다항함수의 적분법 – 2 정적분** ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준**	**[미적분I] – (라) 다항함수의 적분법 – 2 정적분** 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. 미적1422. 정적분의 뜻을 안다. 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
제시문 나	교육과정	**[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** 미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
제시문 라	교육과정	**[미적분I] – (다) 다항함수의 미분법 – 3 도함수의 활용** ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분I] – (다) 다항함수의 미분법 – 3 도함수의 활용** 미적1333. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 마	교육과정	**[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – 2 도함수의 활용** ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – 2 도함수의 활용** 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
제시문 바	교육과정	**[수학I] – (다) 도형의 방정식 – 3 원의 방정식** ① 원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학I] – (다) 도형의 방정식 – 3 원의 방정식** 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	**[수학I] – (다) 도형의 방정식 – 3 원의 방정식** ① 원의 방정식을 구할 수 있다. **[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학I] – (다) 도형의 방정식 – 3 원의 방정식** 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다. **[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	**[미적분I] – (라) 다항함수의 적분법 – 2 정적분** ② 정적분의 뜻을 안다. **[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – 2 도함수의 활용**

문항 및 제시문		관련 성취기준
		② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (라) 다항함수의 적분법 – 2 정적분** 미적1422. 정적분의 뜻을 안다. **[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – 2 도함수의 활용** 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
논제 I-3	교육과정	**[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** 미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
논제 I-4	교육과정	**[미적분I] – (다) 다항함수의 미분법 – 3 도함수의 활용** ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (다) 다항함수의 미분법 – 3 도함수의 활용** 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] "수학과 교육과정"

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

2. 자료 출처

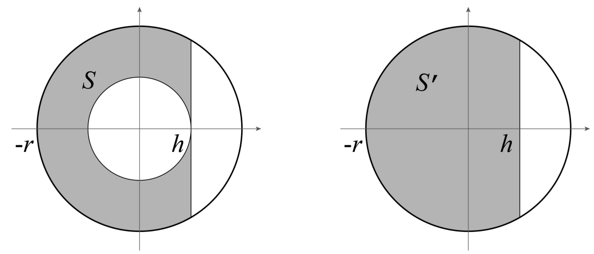
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	류희찬 외	천재교육	2016	130 173
	미적분I	신항균 외	지학사	2015	174
	미적분II	이강섭 외	미래엔	2016	184
	미적분II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	119
	수학I	우정호 외	두산동아	2013	187
기타					

문항 해설

적분법은 넓이·부피와 같은 물리량을 측정하는 핵심적인 수학적 도구이고, 미분법은 수학식으로 표현되는 물리량이 언제 극대와 극소를 가지는지를 판정하는 도구로 널리 활용된다. 본 문제의 핵심적인 내용은 「수학I」의 '도형의 방정식'과 「미적분I」의 '다항함수의 미분법'과 '다항함수의 적분법', 「미적분II」의 '미분법'과 '적분법' 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 도형 문제를 좌표평면에 구현하고 정적분과 미분을 활용하여 도형의 최대 넓이를 구하고, 입체도형의 단면의 넓이를 찾고 정적분과 미분을 활용하여 최대 부피를 구할 수 있는지와 그 풀이 과정을 체계적이고 논리적으로 논술할 수 있는지를 평가한다.

예시 답안

I-1. 원의 중심 O를 좌표평면의 원점으로 하고 아래 그림에서처럼 물의 수면이 y축과 평행하다고 하자.



도형 S는 반지름의 길이가 r인 원과 두 직선 $x=-r$, $x=h$로 둘러싸인 도형 S'에서 반지름의 길이가 h인 원을 제외하여 얻어진다. <제시문 [바]>를 활용하면 반지름의 길이가 r인 원의 위 곡선과 아래 곡선의 식은 각각 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 과 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로, <제시문 [가]>를 활용하면 도형 S'의 넓이는 $\int_{-r}^{h} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$가 된다. 도형 S의 넓이 A는 S'의 넓이에서 반지름의 길이가 h인 원의 넓이 πh^2을 뺀 것이므로,

$$A=\int_{-r}^{h} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx-\pi h^2=-\pi h^2+2\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

I-2. 도형 S의 넓이 A를 h에 대하여 미분하면

$$\frac{dA}{dh}=\frac{d}{dh}\left(-\pi h^2+2\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\right)$$

$$=-2\pi h+2\frac{d}{dh}\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

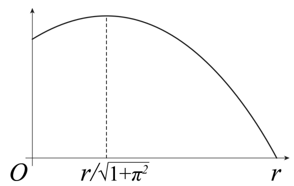
이고, <제시문 [다]>를 활용하면

$$\frac{dA}{dh}=-2\pi h+2\sqrt{r^2-h^2}$$

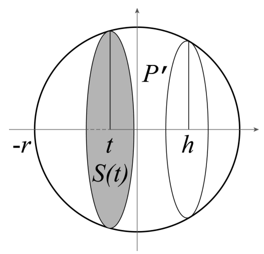
이다. 극값을 구하기 위한 식 $\frac{dA}{dh}=0$의 해는 $h=\pm\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$ 이고, $h\geq 0$이므로 $h=\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$ 이다.

만약 $0\leq h<\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$ 이면 $\frac{dA}{dh}=-2\pi h+2\sqrt{r^2-h^2}>0$이고, $\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}<h\leq r$이면

$\dfrac{dA}{dh} < 0$이 되므로, <제시문 [라]>를 활용하면 A는 $h = \dfrac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$에서 극댓값을 가진다. h에 대한 A는 닫힌 구간 $[0, r]$에서 극값을 유일하게 극댓값 하나만 가지므로 <제시문 [마]>를 활용하면 A의 그래프는 아래 그림과 같고 A는 $h = \dfrac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$에서 최댓값을 가진다.



I-3. 입체도형 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 구가 평면 $x = h$에 의하여 잘려진 두 부분 중 큰 부분인 입체도형 P'에서 반지름의 길이가 h인 구를 제외하여 얻어진다.



위 그림에서처럼 입체도형 P'가 평면 $x = t$에 의하여 잘려진 단면 $S(t)$는 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2 - t^2}$인 원이므로, 그 넓이는 $\pi(r^2 - t^2)$이다. <제시문 [가]>를 활용하면 P'의 부피는

$$\int_{-r}^{h} \pi(r^2 - t^2)\, dt = \left[\pi(r^2 t - t^3/3)\right]_{t=-r}^{t=h} = \pi\left(-\frac{h^3}{3} + r^2 h + \frac{2r^3}{3}\right)$$

이다. P의 부피는 P'의 부피에서 반지름의 길이가 h인 구의 부피를 뺀 것이므로 $V = \pi\left(-\dfrac{5h^3}{3} + r^2 h + \dfrac{2r^3}{3}\right)$이다.

I-4. V를 h에 대하여 미분하면 $\dfrac{dV}{dh} = \pi(-5h^2 + r^2)$이고, 식 $\dfrac{dV}{dh} = 0$의 해는 $h = \pm\dfrac{r}{\sqrt{5}}$이다. $h \geq 0$이므로 $h = \dfrac{r}{\sqrt{5}}$이 해가 된다. 만약 $0 \leq h < \dfrac{r}{\sqrt{5}}$이면 $\dfrac{dV}{dh} > 0$이고, $\dfrac{r}{\sqrt{5}} < h \leq r$이면 $\dfrac{dV}{dh} < 0$이므로, <제시문 [라]>를 활용하면 V는 $h = \dfrac{r}{\sqrt{5}}$에서 극댓값을 가진다. 논제 I-2의 답안에서처럼 닫힌 구간 $[0, r]$에서 V가 극댓값만 유일하게 가지므로, <제시문 [마]>를 활용하여 아래와 같이 그래프를 살펴보면

V가 $h = \dfrac{r}{\sqrt{5}}$에서 최댓값 $V = \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{15}\pi r^3$를 가진다.