2018학년도 온라인 모의논술고사 예시답안 (자연계)

수학

(1)

삼각형 AA_1B은 각ABA_1이 $\frac{2\pi}{3}$이고 $\overline{AB}=\overline{A_1B}=2$인 이등변삼각형이다.

선분 AA_1의 중점을 P_1이라 하면 삼각형 ABP_1은 각 ABP_1이 $\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}=2$인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{AP_1}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 이고, $l_1=2\overline{AP_1}=2\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 A_1A_2C는 각 A_1CA_2가 $\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{A_1C}=\overline{A_2C}$인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{A_1C}=\overline{A_1B}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{BC}=2+1=3$ 이므로 $l_2=\sqrt{\overline{A_1C}^2+\overline{A_2C}^2}=3\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 AA_2A_3는 각 A_2AA_3가 $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$이고 $\overline{AA_2}=\overline{AA_3}$ 인 이등변삼각형이다.

선분 A_2A_3의 중점을 P_3이라 하면, 삼각형 AA_3P_3은 각 A_3AP_3가 $\frac{5\pi}{12}$이고

$\overline{AA_3}=3+\sqrt{3}$ (삼각형 ABC 의 둘레의 길이)인 직각삼각형이므로 $\overline{A_3P_3}=\overline{AA_3}\sin\frac{5\pi}{12}$ 이다.

한편 $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$이므로 사인함수의 덧셈정리에 의해

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

이다. 따라서 $l_3=2\overline{A_3P_3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 이고, $L_3=l_1+l_2+l_3=6\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 이다.

(2)

삼각형ABC의 중점을 O라 하면 삼각형AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$이고 각$AOB$가 $\frac{2\pi}{3}$ 인 이등변삼각형이다. 선분 AB의 중점을 P_0라 하면 삼각형AOP_0는 각AOP_0가 $\frac{\pi}{3}$, 각OP_0A가 $\frac{\pi}{2}$ 그리고 $\overline{OA}=r$인 직각삼각형이다. 따라서 $\overline{AB}=2\overline{OA}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$이다.

삼각형AA_1B는 각ABA_1이 $\frac{2\pi}{3}$이고 $\overline{AB}=\overline{A_1B}=\sqrt{3}r$인 이등변삼각형이므로, 삼각형$AOB$와 닮은 삼각형이다. 따라서 $l_1=\overline{AA_1}=2\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=3r$ 이다.

삼각형A_1A_2C는 각A_1CA_2가 $\frac{2\pi}{3}$이고 $\overline{A_1C}=\overline{A_2C}=2\sqrt{3}r$인 이등변삼각형이므로, 삼각형$AOB$와 닮은 삼각형이다. 따라서 $l_2=\overline{A_1A_2}=2\overline{A_1C}\sin\frac{\pi}{3}=6r$ 이다.

삼각형AA_2A_3는 각A_2AA_3가 $\frac{2\pi}{3}$이고 $\overline{AA_2}=\overline{AA_3}=3\sqrt{3}r$인 이등변삼각형이므로, 삼각형$AOB$와 닮은 삼각형이다. 따라서 $l_3=\overline{A_2A_3}=2\overline{AA_3}\sin\frac{\pi}{3}=9r$ 이고

$L_3=l_1+l_2+l_3=3r+6r+9r=18r$이다.

(3)

정 n각형 $A_0B_1B_2\ldots B_{n-1}$의 중점을 O라 하면 삼각형A_0B_1O는 $\overline{OA_0}=\overline{OB_1}=r$이고 각$A_0OB_1$이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형이다. 선분 A_0B_1의 중점을 P_0라 하면 삼각형A_0OP_0는 각A_0OP_0가 $\frac{\pi}{n}$, 각OP_0A_0가 $\frac{\pi}{2}$ 그리고 $\overline{OA_0}=r$인 직각삼각형이다. 따라서 $\overline{A_0B_1}=2\overline{OA_0}\sin\frac{\pi}{n}=2r\sin\frac{\pi}{n}$ 이고 마찬가지로 $\overline{B_1B_2}=\cdots=\overline{B_{n-2}B_{n-1}}=\overline{B_{n-1}A_0}=2r\sin\frac{\pi}{n}$ 이다. 여기서 $a=\sin\frac{\pi}{n}$라 하면

$\overline{A_0B_1}=\overline{B_1B_2}=\cdots=\overline{B_{n-2}B_{n-1}}=\overline{B_{n-1}A_0}=2ra$이다.

정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{n-2}{n}\pi$이므로 삼각형$A_0A_1B_1$은 각$A_0B_1A_1$이 $\frac{2\pi}{n}$이고 $\overline{A_0B_1}=\overline{A_1B_1}=2ra$인 이등변삼각형이다. 따라서 삼각형$A_0A_1B_1$은 삼각형$A_0B_1O$와 닮은 삼각형이다. 그러므로 $l_1=\overline{A_0A_1}=2\overline{A_1B_1}\sin\frac{\pi}{n}=2(2ra)a$ 이다.

삼각형$A_1A_2B_2$은 각$A_1B_2A_2$가 $\frac{2\pi}{n}$이고 $\overline{A_1B_2}=\overline{A_2B_2}=2(2ra)$인 이등변삼각형이다. 따라서 삼각형$A_1A_2B_2$은 삼각형$A_0B_1O$와 닮은 삼각형이다. 그러므로 $l_2=\overline{A_1A_2}=2\overline{A_2B_2}\sin\frac{\pi}{n}=2(4ra)a$ 이다. 비슷한 방법으로 $k=3,\ldots,n$에 대하여, l_k는 두변의 길이가 $2kra$이고 그 사잇각이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형의 나머지 한 변의 길이이므로 $l_k=2(2kra)a$이다.

따라서 $L_n=\sum_{k=1}^{n}l_k=\sum_{k=1}^{n}2(2kra)a=2rn(n+1)a^2$ 이다.

(4) 반지름이 r인 원은 그에 내접하는 정 n각형으로 근사할 수 있으므로, 실의 끝점이 움직인 거리 L은 논제 (3)에서 L_n의 n이 무한대로 갈 때의 극한

$$L=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}2rn(n+1)a^2=\lim_{n\to\infty}2rn(n+1)\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2$$

이다.

또한 제시문 [다]에서 $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}2rn(n+1)\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 &= 2r\pi^2\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\right\}\\ &=2r\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\\ &= 2r\pi^2\end{aligned}$$

이고, 따라서 $L=2r\pi^2$이다.

2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

물리

[논제 II-1-(1)]

경사면을 기준으로 평행 방향 및 수직 방향을 각각 x축 및 y축으로 설정하면, 공은 x축 및 y축 방향에 대해 모두 등가속도 직선 운동을 하게 된다. 공을 던진 뒤 t초 후 공의 위치 $x(t)$ 및 $y(t)$를 계산하면,

x축 좌표 $x(t)=v\cos\theta t+\frac{1}{2}g\sin\theta t^2=\frac{\sqrt{3}}{2}vt+\frac{g}{4}t^2$ (1)

y축 좌표 $y(t)=v\sin\theta t-\frac{1}{2}g\cos\theta t^2=\frac{1}{2}vt-\frac{\sqrt{3}}{4}gt^2$ (2)

[논제 II-1-(2)]

물체는 경사면에서 y 방향으로 등가속도 운동을 하므로 y축 방향의 속도 $v_y=vsin\theta-gcos\theta t$가 되고, 최고점에서 $v_y=0$이므로, 최고점까지 도달하는 시간 $t_h=\frac{vsin\theta}{gcos\theta}$이 된다. 따라서 t_h를 식(2)에 대입하여 최고점 높이 h를 구하면,

$$h=vsin\theta\left(\frac{vsin\theta}{gcos\theta}\right)-\frac{1}{2}gcos\theta\left(\frac{vsin\theta}{gcos\theta}\right)^2=\frac{v^2\sin^2\theta}{2gcos\theta}=\frac{\sqrt{3}\,v^2}{12g}$$

[논제 II-1-(3)]

공이 경사면에 떨어졌을 때 초기 위치부터 떨어진 거리 d를 구하기 위해 S_y가 0이 될 때의 시각 t를 구한다.

식(2)으로부터 $S_y=0$일 때의 시각 $t=\frac{2v\sin\theta}{g\cos\theta}$

따라서 $d=S_x(t=\frac{2v\sin\theta}{g\cos\theta})=\frac{2v^2\sin\theta}{g}(1+\tan^2\theta)$

문제에서 $\theta=30^\circ$이므로, $d=\frac{4v^2}{3g}$

[논제 II-1-(4)]

답안에서 설정한 좌표계에서 사람이 경사면을 미끄러진 뒤 t초 후의 위치 (P_x, P_y)를 계산하면,

x축 위치 $P_x=\frac{1}{2}g\sin\theta t^2$ (3)

y축 위치 $P_y=0$ (4)

(1)과 (3)을 비교하면, 경사면의 각도 $\theta(\neq 90^\circ)$ 및 시각에 관계없이 $S_x>P_x$이므로 사람이 공을 잡는 것은 불가능하다. (x축 방향의 가속도가 같은 상황에서 공의 경우 x축 방향으로 초기 속력이 더해지므로 사람은 공을 잡을 수 없다.)

[논제 II-1]

용기 내 액체의 수면과 관의 가장 위쪽(1번 위치)과 아래쪽 끝(2번 위치)에 대해 베르누이 법칙을 각각 적용하면, (여기서, P_1은 1번 위치에서의 액체의 압력, v는 액체의 속력이다.)

$$P+\rho g h_2 = P_1+\rho g(h_1+h_2)+\frac{1}{2}\rho v^2 = P+\frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (5)$$

[논제 II-1-(1)]

관의 아래쪽 끝에서 흘러나오는 액체의 속력 v는 식(5)로부터

$\rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v^2$ 이므로, 따라서 $v=\sqrt{2gh_2}$ 이다.

[논제 II-1-(2)]

관의 아래쪽 끝에서 물이 흘러나올 수 있기 위한 높이 h_1는 식(5)로부터

$P_1 = P-\rho g h_1 - \frac{1}{2}\rho v^2 = P-\rho g h_1 - \rho g h_2 \geq 0$를 만족해야 하므로,

따라서 최대 높이 $h_1 = \frac{P}{\rho g} - h_2$이다.

[논제 II-1-(3)]

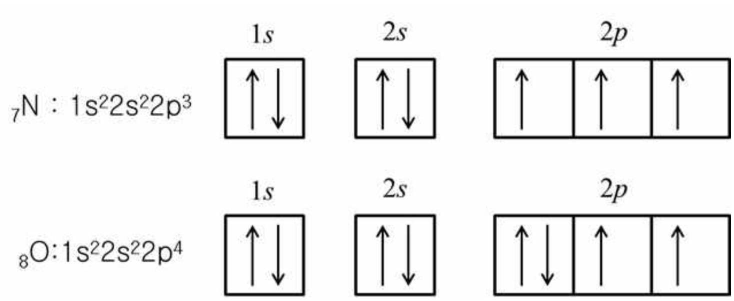
h_2가 커지면 관을 통해 빠져나오는 액체의 속력이 커져 단위 시간 당 더 많은 양의 액체를 아래로 빼낼 수 있다. 하지만 구부러진 관에서 액체를 퍼 올릴 수 있는 최대 높이가 낮아져 용기 깊숙이 담겨있는 액체를 퍼낼 수 없다.

2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

화학

[논제 II-1]
<   II-1> (20점)

(1) (8점)
쌓음 원리, 파울리 배타원리와 훈트 규칙에 의해 $_7N$와 $_8O$의 바닥상태 전자 배치는 다음과 같다.



이때, N과 O는 모두 같은 2주기 원소이고, N의 양성자수는 7개인 반면, O의 양성자수는 8개이므로 N의 경우 유효 핵전하가 작다. 즉 핵이 전자에 미치는 인력이 작게 되므로 원자 반지름은 N의 경우가 크다.

(2) (6점)
이온화 에너지의 경우, 전자를 1개 제거 할 때의 에너지로, 상기의 전자배치로부터 N의 경우에는 짝짓지 않은 상대적으로 안정한 전자를 제거하는 반면, O의 경우에는 상대적으로 불안정한 짝지은 전자를 제거하게 되므로 N대비 쉽게 이온화가 되어 이온화 에너지가 작다. 따라서 N가 더 큰 이온화 에너지를 갖게 된다.

(3) (6점)
$_7N^{3-}$와 $_{11}Na^+$는 모두 10개의 전자를 갖는 이온들이다. 그런데 N^{3-}에는 양성자가 7개가 있고, Na^+에는 양성자 11개가 있다. 따라서, N^{3-}의 경우에는 유효 핵전하가 작게 되어, 핵이 전자에 미치는 인력이 작게 되므로, N^{3-}의 이온 반지름이 더 크다.

[논제 II-2]
<논제 II-2> (20점)
(1) (8점)
철광석(Fe_2O_3)과 코크스(C)의 철광석과 화학 반응은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$2Fe_2O_3(s)$ + $3C(s)$ → $4Fe(s)$ + $3CO_2(g)$
또는
$2C(s)$ + $O_2(g)$ → $2CO(g)$
$Fe_2O_3(s)$ + $3CO(g)$ → $2Fe(s)$ +$3CO_2(g)$

위 반응에서 철광석은 산소를 잃고 철(Fe)이 되면서 환원되고 탄소는 산소와 결합하여 이산화탄소가 되면서 산화된다.
산화수 개념을 이용하여 산화-환원 반응을 설명하면 철의 산화수는 +3에서 0으로 감소하면서 환원되고 탄소의 산화수는 0에서 +4 (또는 0 → +2 → +4)로 증가하면서 산화된다.

반면에 석회석은 철광석에 포함된 불순물과 반응하여 슬래그를 형성하면서 불순물을 제거한다.

(2) (8점)
NO, NO_2, NH_3가 반응하면서 질소와 물이 생성되는 반응식은 다음과 같다.

$$NO(g) + NO_2(g) + 2NH_3(g) \rightleftarrows 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

NO와 NO_2는 산소를 잃고 $N_2(g)$가 되면서 환원된다.
반응 전 NO, NO_2, NH_3에 있는 N의 산화수는 각각 +2, +4, −3이다. 반응 후 N의 산화수는 0이다.
따라서 NO와 NO_2는 환원되고 NH_3는 산화된다.
반면에 반응 전후 산소와 수소의 산화수는 각각 －2, +1로 일정하다. 따라서 질소만 산화-환원 반응에 참여한다.

(3) (4점)
H_2O_2에서 수소의 산화수는 +1이고 전체 산화수 합은 0이어야 하므로 산소의 산화수는 －1이 된다.
OF_2에서 플루오린 (F)의 전기음성도는 산소보다 더 크다. 따라서 플루오린의 산화수가 －1이고 산소의 산화수는 +2가 된다.

2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

생명과학

1. 각각의 대립 유전자쌍이 서로 독립적으로 행동하므로 이 사성잡종 교배를 네 개의 각기 다른 단성잡종 교배로 생각할 수 있다.

Aa x Aa: aa가 태어날 확률 = 1/4 (1/2 x 1/2)

Bb x Bb: bb가 태어날 확률 = 1/4

Cc x Cc: cc가 태어날 확률 = 1/4

Dd x Dd: dd가 태어날 확률 = 1/4

따라서 각 대립유전자 쌍이 분리되는 현상은 서로 독립적으로 일어나므로 자손이 aabbccdd일 확률은 1/4 x 1/4 x 1/4 x 1/4= 1/256이다.

각각의 대립 유전자쌍이 이형접합인 자손을 만드는 방법은 두 가지가 있다. 즉, A 대립유전자는 난자에서, a 대립유전자는 정자에서 오는 경우가 있을 수 있고 그와 반대인 경우도 가능하다. 따라서 이형접합자가 나올 확률은 (1/2 x 1/2) + (1/2 x 1/2) = 1/2이다. 각각의 대립 유전자쌍은 서로 독립적으로 행동하므로 이 사성잡종 교배를 네 개의 각기 다른 단성잡종 교배로 생각할 수 있다. 따라서 각 대립유전자 쌍이 분리되는 현상은 서로 독립적으로 일어나므로, 자손이 AaBbCcDd일 확률은 1/2 x 1/2 x 1/2 x 1/2= 1/16이다.

2. 잡종 1대에서 생식 세포의 유전자형이 ABCD, ABCd, abcD, abcd인 4종류의 생식세포가 같은 비율로 형성되었으므로, 유전자형이 ABC와 abc는 각각 연관되어 유전됨을 알 수 있다. 따라서 2유전자 쌍의 독립의 법칙과 동일하게 유전됨을 알 수 있다. 이 교배 결과에서 태어날 자손이 네 가지 유전자 모두에 대해서 열성인 동형접합(aabbccdd)은 1/16이며, 이형접합(AaBbCcDd)을 갖게 될 확률은 1/4 (= 4/16)이다. (10점)

3. 식물 Y는 가을에 개화하므로 일조 시간이 짧아지면 꽃이 피는 단일 식물이다. 따라서 식물 Y의 재배 동안에 밤 동안에 전등을 켜서 빛이 비치는 시간을 적절하게 늘려주면 일조 시간이 늘어나게 된다. 이로 인하여 식물 Y가 꽃 피는 시기가 지연되며, 이듬해 봄에 꽃이 피도록 할 수 있다.