[문항정보]

	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	2018 온라인 모의논술고사	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의학계(수학)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분I
	핵심개념 및 용어	수열의 합, 급수의 수렴과 발산, 등비급수의 활용
예상 소요 시간	60분	

문항 및 제시문

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n \quad \infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n \quad \infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

와 같이 나나낸다. 여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 무한대라고 읽는다.
수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.

[나] 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라고 하며, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다. 이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$일 때, 이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 급수의 합이라 하고, 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다. 한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

[다] 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

이고, 양변에 r을 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

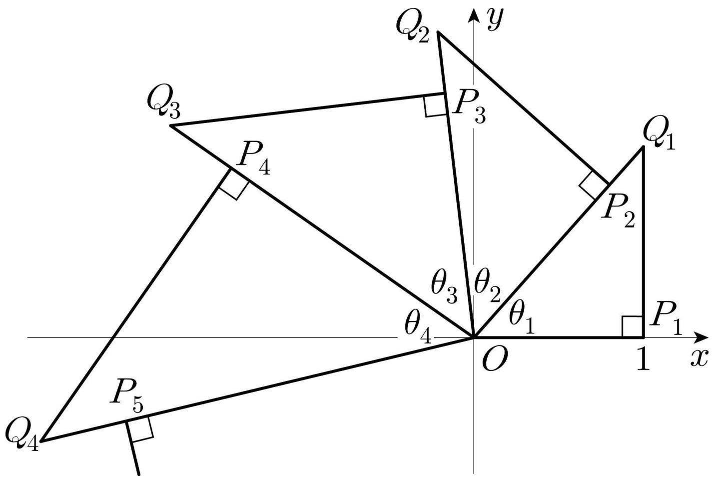
이다. (1)에서 (2)를 변끼리 빼면

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

이므로 S_n은 다음과 같다.

$r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$일 때, (1)에서 $S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n} = na$



[그림 1]

[그림 1]과 같이 선분 OP_1의 길이 $\overline{OP_1}$는 1이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\angle OP_nQ_n$은 직각이고, 점 P_{n+1}은 선분 OQ_n에 놓여 있는 좌표평면의 점 P_n과 점 Q_n을 생각하자. (단, $n \geq 1$) 여기서, 기호의 편의를 위하여, $\angle P_nOQ_n = \theta_n$, $\overline{OP_{n+1}}/\overline{OQ_n} = \alpha_n$, $\overline{OP_n} = p_n$, $\overline{OQ_n} = q_n$, $\overline{P_nQ_n} = t_n$이라고 표시하자.

[논제 I-1] θ_n이 모두 상수 θ로 일정하고 α_n도 모두 상수 α로 일정할 때, p_n을 θ, α, n에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \alpha$) (5점)

[논제 I-2] 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$이고 $t_n = \dfrac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$일 때, $\sin^2\theta_n$을 n에 대한 식으로 나타내시오. 또한 $\lim\limits_{n\ \infty} \sin^2\theta_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

[논제 I-3] 모든 자연수 n에 대하여 α_n이 상수 $\sqrt{a}$로 일정하고, 어떤 상수 r에 대하여 t_n이 $\sqrt{r^n}$일 때, p_n^2을 n에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $r > 0$, $a > 0$) (20점)

[논제 I-4] [논제 I-3]에서 구한 식을 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$이 수렴하는 a와 r의 범위를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

의도

본 문제는 도형이 어떤 규칙적인 방법으로 순차적으로 만들어질 때 생성되는 수열에 대하여 그 규칙성을 수학식으로 적절하게 표현하여 수열의 연속 항들의 관계를 밝히고 이를 이용하여 일반항의 식을 구할 수 있고 그 극한의 수렴, 발산 여부를 판단할 수 있는지를 평가하고자 한다.

I-1. 순차적으로 만들어지는 도형의 선분들의 길이로 구성된 수열을 삼각비 성질의 기본적인 적용으로 등비수열로 나타낼 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-2. 다른 규칙이 주어졌을 때 적절한 계산을 통하여 수열의 일반항을 유추하고 그 극한을 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-3. 또 다른 규칙이 주어졌을 때 등비수열의 합 공식을 적용하여 수열의 일반항을 모든 경우에 다 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-4. 등비수열이 포함된 수열의 극한의 수렴, 발산을 모든 경우에 대하여 판별할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

근거

1. 근거

및 제시문		관련 성취기준
제시문 가	교육과정*	**[I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준**	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. 미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
제시문 나	교육과정	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** 미적1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
제시문 다	교육과정	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	**[중학교] – (마) 기하 – ⑧ 피타고라스 정리** ② 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. **[중학교] – (마) 기하 – ⑨ 삼각비** ② 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다. **[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[중학교] – (마) 기하 – ⑧ 피타고라스 정리** 수95082. 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. **[중학교] – (마) 기하 – ⑨ 삼각비** 수95092. 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다. **[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	**[수학II] – (다) 수열 – ② 수열의 합** ② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학II] – (다) 수열 – ② 수열의 합** 수학2322. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
		미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
논제 I-3	교육과정	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
논제 I-4	교육과정	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. ② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. ③ 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** 미적1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. 미적1122. 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. 미적1123. 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

*: 고시 제 2011-361호 [별책 8] “수학과 교육과정”

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

2. 자료 출처

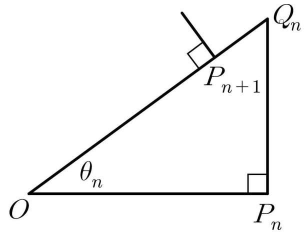
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	13 14
	미적분I	신항균 외	지학사	2015	30
	수학II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	112
기타					

문항 해설

수열과 급수는 극한과 구분적분법 등의 개념 정립을 위한 핵심적인 수학적 도구이고, 수렴, 발산 여부의 판별은 그 중에서 가장 중요한 부분이다. 본 문제의 주요 내용은 「중학수학」의 ‘기하’, 「수학II」의 ‘수열’, 「미적분I」의 ‘수열의 극한’ 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통하여 학생들이 제시문을 정확하게 읽고 적절히 활용하여 도형이 어떤 규칙적인 방법으로 순차적으로 만들어질 때 생성되는 수열의 일반항을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한, 수열의 극한의 수렴, 발산 여부를 판단할 수 있는지와 그 풀이 과정을 체계적이고 논리적으로 논술할 수 있는지를 평가한다.

답안

I-1. 그림과 같은 직각삼각형 $\triangle P_nOQ_n$에서 다음의 식을 알 수 있다.



$$\overline{OQ_n}^2 = \overline{OP_n}^2 + \overline{P_nQ_n}^2, \quad , \ q_n^2 = p_n^2 + t_n^2$$

$$\overline{OP_{n+1}} = \alpha_n \overline{OQ_n}, \text{ 즉, } p_{n+1} = \alpha_n q_n$$

$$\overline{OP_{n+1}}^2 = \alpha_n^2 \overline{OP_n}^2 + \alpha_n^2 \overline{P_nQ_n}^2, \text{ 즉, } p_{n+1}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$$

$\angle P_nOQ_n = \theta$이므로 $q_n = \dfrac{p_n}{\cos\theta}$이다. 한편, $\alpha_n = \alpha$이므로, $p_{n+1} = \alpha q_n = \left(\dfrac{\alpha}{\cos\theta}\right)p_n$이 되어 p_n이 공비 $\dfrac{\alpha}{\cos\theta}$이고 첫째항이 $p_1 = \overline{OP_1} = 1$인 등비수열임을 알 수 있다. 이 등비수열의 일반항은 $p_n = \left(\dfrac{\alpha}{\cos\theta}\right)^{n-1}$이다.

I-2. 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$이고 $t_n = \dfrac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$이므로, 식 $p_{n+1}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$으로부터 $p_{n+1}^2 = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 p_n^2 + \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2$을 얻는다. 이 항등식으로부터 p_{n+1}^2을 구하는 것은 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.

[방법 1] 이 식의 양변에 $(n+1)^2$을 곱하고 n^2을 오른쪽으로 이항하면,

$$(n+1)^2 p_{n+1}^2 - n^2 = n^2 p_n^2 - (n-1)^2$$

을 얻는다. 이 항등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로, 수열 $(n+1)^2 p_{n+1}^2 - n^2$은 n에 상관없이 값이 일정함을 알 수 있다. 특히 $n=1$일 때의 값과 같아지게 되므로

$$(n+1)^2 p_{n+1}^2 - n^2 = 1^2 p_1^2 - (1-1)^2 = 1.$$

이를 정리하여 $p_{n+1}^2 = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$을 구할 수 있다.

[방법 2] 위 항등식에 n의 값을 1부터 순차적으로 대입하면,

$$p_1^2 = 1$$

$$p_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{0}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p_3^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$p_4^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$p_5^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\vdots$$

$p_{n+1}^2 = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$을 유추할 수 있다.

이렇게 구한 p_{n+1}^2을 이용하여 $q_n^2 = \dfrac{1}{\alpha_n^2} p_{n+1}^2 = \dfrac{n^2+1}{n^2}$이고, $\sin^2\theta_n = \dfrac{t_n^2}{q_n^2} = \dfrac{2n-1}{n^2+1}$을 구할 수 있다. $n \quad \infty$일 때, 그 극한은 $\displaystyle\lim_{n \quad \infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{0}{1} = 0$으로 수렴한다.

I-3. 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \sqrt{a}$이고 $t_n = \sqrt{r^n}$이므로, 식 $p_{n+1}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$으로부터 식 $p_{n+1}^2 = a p_n^2 + a r^n$을 얻는다. 이를 이용하여 p_n^2을 구하는 것은 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.

[방법 1] 위 항등식에 n의 값을 1부터 순차적으로 대입하면,

$$p_1^2 = 1$$

$$p_2^2 = a + ar$$

$$p_3^2 = a^2 + a^2 r + a r^2$$

$$p_4^2 = a^3 + a^3 r + a^2 r^2 + a r^3$$

$$p_5^2 = a^4 + a^4 r + a^3 r^2 + a^2 r^3 + a r^4$$

$$\vdots$$

$p_n^2 = a^{n-1} + a^{n-1} r + a^{n-2} r^2 + a^{n-3} r^3 + \cdots + a r^{n-1}$을 유추할 수 있다.

여기서, $a^{n-1} r + a^{n-2} r^2 + a^{n-3} r^3 + \cdots + a r^{n-1}$는 첫째항이 $a^{n-1} r$, 공비 r/a인 등비수열의 $n-1$번째 합이므로

$$p_n^2 = \begin{cases} a^{n-1} + \dfrac{a^{n-1} r\left((r/a)^{n-1} - 1\right)}{r/a - 1}, & r/a \neq 1 \\ a^{n-1} + \underbrace{a^n + a^n + \cdots + a^n}_{n-1}, & r/a = 1 \end{cases} = \begin{cases} a^{n-1} + \dfrac{ar^n - a^n r}{r-a}, & r \neq a \\ a^{n-1} + (n-1)a^n, & r = a \end{cases}$$

[방법 2] 먼저 $r=a$일 때, $p_{n+1}^2 = a p_n^2 + a^{n+1}$이 되고 a^{n+1}을 양변에 나누면 $\dfrac{p_{n+1}^2}{a^{n+1}} = \dfrac{p_n^2}{a^n} + 1$을 얻는다. 이로부터 수열 $\dfrac{p_n^2}{a^n}$이 첫째항이 $\dfrac{1}{a}$, 공차가 1인 등차수열임을 알 수 있으므로, $\dfrac{p_n^2}{a^n} = \dfrac{1}{a} + (n-1)$과 $p_n^2 = a^{n-1} + (n-1)a^n$임을 밝힐 수 있다.

한편, $r \neq a$일 때, $p_{n+1}^2 = a p_n^2 + a r^n$이 $p_{n+1}^2 - \dfrac{ar^{n+1}}{r-a} = a\left(p_n^2 - \dfrac{ar^n}{r-a}\right)$로 바뀌고, 수열

$p_n^2 - \frac{ar^n}{r-a}$ 첫째항이 $1-\frac{ar}{r-a}$, 공비가 a인 등비수열임을 알 수 있다. 이로부터

$p_n^2 - \frac{ar^n}{r-a} = \left(1-\frac{ar}{r-a}\right)a^{n-1}$을 얻고 $p_n^2 = a^{n-1} + \frac{ar^n - a^n r}{r-a}$임을 밝힐 수 있다. 이는 [방법 1]의 결과와 같다.

I-4. [논제 I-3]의 답으로부터, $q_n^2 = \frac{1}{a}p_{n+1}^2 = \begin{cases} a^{n-1} + \frac{r^{n+1} - a^n r}{r-a}, & r \neq a \\ a^{n-1}(1+an), & r = a \end{cases}$

$$\sin^2\theta_n = \frac{t_n^2}{q_n^2} = \begin{cases} \dfrac{r^n}{a^{n-1} + \dfrac{r^{n+1} - a^n r}{r-a}}, & r \neq a \\ \dfrac{r^n}{a^{n-1}(1+an)}, & r = a \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(r-a)r^n}{a^{n-1}(r-a-ar) + r^{n+1}}, & r \neq a \\ \dfrac{a}{1+an}, & r = a \end{cases}$$

먼저, $r=a$일 때, 극한 $\lim_{n\ \ \infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+an} = 0$으로 수렴한다.

$r > a$일 때, $0 < \frac{a}{r} < 1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n = 0$이다. 이때,

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r-a)r}{\left(\frac{a}{r}\right)^{n-1}(r-a-ar) + r^2} = \frac{(r-a)r}{r^2} = 1 - \frac{a}{r}$$으로 수렴한다.

$r < a$일 때, $0 < \frac{r}{a} < 1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r-a)r\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}}{(r-a-ar) + r^2\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}} = \frac{0}{r-a-ar} = 0$$으로 수렴한다. 여기서, 분모 $r-a-ar$는 영이 될 수 없다. 왜냐하면, $r < a < (1+r)a$이므로, $r-(1+r)a < 0$이기 때문이다.

이를 종합하면 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$는 모든 $a > 0$, $r > 0$에 대하여 수렴함을 알 수 있다.